

Analogue Realizations of Fractional Order Controllers

by

Ivo Petráš

Technical University of Košice, Slovakia

Igor Podlubny

Technical University of Košice, Slovakia

Paul O'Leary

Montanuniversitat of Leoben, Austria

Ľubomír Dorčák

Technical University of Košice, Slovakia

Blas M. Vinagre

University of Extremadura, Badajoz, Spain

Fakulta BERG, TU Košice, 2002

Autori: I. Petráš, I. Podlubny, P. O'Leary, Ľ. Dorčák, B. M. Vinagre

Názov: Analogue Realizations of Fractional Order Controllers

Počet strán: 84

Formát: A5

Vydala: Fakulta BERG, TU Košice

Rok: 2002

Vydanie: Prvé

ISBN 80-7099-627-7

Предисловие автора перевода

Автор перевода в течение последних десяти лет активно занимается вопросами проектирования и применения пассивных электронных компонентов с фрактальным импедансом.

В настоящее время существует творческий коллектив, в результате работы которого созданы программы анализа и синтеза конструкций электронных компонентов с фрактальным импедансом на основе многослойных неоднородных резистивно-емкостных сред, изготовлены и проверены экспериментальные толстопленочные электронные компоненты. На их основе испытаны схемы интеграторов и дифференциаторов дробного порядка, мультивибратора и генератора гармонических колебаний дробного порядка. Созданы математические модели ПИД-регуляторов дробного порядка и выполнена имитация работы системы управления на основе ПИД-регулятора дробного порядка.

Для популяризации новой элементной базы и возможностей ее применения создан сайт: www.rifek.ru, на котором можно найти информацию о деятельности группы по разработке и исследованию фрактальных электронных компонентов, и при желании принять участие в работе группы.

Автор перевода не профессиональный переводчик, поэтому не гарантирует высокое литературное качество перевода. Но, занимаясь долгое время проблемами, изложенными в данной книге, гарантирует хорошее качество передачи смысла переводимого текста.

В дополнение к материалу этой книги читателю можно порекомендовать расширить свои познания в области электронных компонентов с фрактальным импедансом, скачав файл: Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А. Радиоэлементы с фрактальным импедансом, выложенную в разделе Электроника на сайте www.twirpx.com.

Перевод выполнен для личных целей, но, учитывая практически полное отсутствие литературы о фрактальных элементах и ПИД-регуляторах дробного порядка на русском языке, автор перевода счел целесообразным познакомить с этой информацией лиц, интересующихся данной тематикой.

Автор перевода не несет ответственности за возможное использование текста перевода кем-то из читателей в своих коммерческих интересах.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

Идея дробных исчислений появилась в то же самое время, с которого развивается и обычное исчисление, первые ссылки на которые вероятно ассоциируются с перепиской между Лейбницем (Leibniz) и Лопиталем (L'Hospital) в 1695, в которой обсуждается дифференцирование половинного порядка.

Дробные исчисления использовались для моделирования физических систем (например, [24, 25, 43, 55]), но можно назвать и несколько работ, касающихся применения дробного исчисления в теории управления (например, [2, 23, 26, 34, 44]). Эти работы используют непрерывные математические модели дробного порядка.

Реальные объекты в общем случае являются дробными [50], однако для многих из них эта дробность очень мала. Типичным примером системы не целого (дробного) порядка является зависимость ток-напряжение полубесконечной передающей RC-линии без потерь или диффузия тепла в полубесконечном твердом теле, где тепловой поток равен производной половинного порядка от температуры [43].

Основной причиной использования этих моделей было отсутствие методов решения дифференциальных уравнений дробного порядка. Контроллеры целого или дробного порядка, спроектированные на основе математической модели целого порядка реальной системы дробного порядка являются адекватными. Имеются существенные отличия между откликами управляемой системы с моделью системы целого порядка и реальной управляемой системой [7]. Мы должны идентифицировать и описывать реальный объект моделями дробного порядка и затем проектировать контроллер. Первое преимущество состоит в том, что мы имеем больше степеней свободы модели. Второе преимущество – это наличие "памяти" в модели. Системы дробного порядка имеют неограниченную память, в то время как в случаях систем це-

лого порядка память ограничена. Следовательно, нам нужен элемент, характеризующий память (например, дробный интеграл или производная) в модели дробного порядка. Этот элемент памяти обеспечивает историю и ее связь с прошлым и будущим.

Цель этой книги – демонстрация возможностей проектирования, реализации и настройки более общей модели классического аналогового ПИД контроллера (аналоговой модели дробного порядка), используя дробные исчисления. Мы будем называть их $PI^\lambda D^\delta$ контроллерами [7, 40, 42]. Роль аналоговых контроллеров явно недооценена, особенно в случае быстропротекающих процессов [12].

Глава 2

ОСНОВЫ ДРОБНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Введение в дробные исчисления

Дробные исчисления являются обобщением обычного интегрирования и дифференцирования к фундаментальному оператору не целого порядка ${}_a D_t^\alpha$, где a и t – пределы операции. Непрерывный оператор интегрирования/дифференцирования определяется как

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) > 0, \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \Re(\alpha) > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где α – порядок операции, обычно $\alpha \in R$.

Для обобщенного дробного интегрирования/дифференцирования (ДИД) используется два определения: (Grünwald-Letnikov) Грюнвальда-Летникова (ГЛ) и (Riemann-Liouville) Римана-Лиувилля (РЛ) [32, 43]. Определение по ГЛ представляется выражением

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \quad (2.2)$$

где $[x]$ обозначает целую часть x .

В этой книге мы будем рассматривать определение ДИД только по РЛ. Это связано с тем, что для широкого класса функций оба определения ГЛ и РЛ эквивалентны [43].

Другие хорошо известные определения ДИД: (Caputo's) Капуто, (Weyl's) Вейля и (Fourier's) Фурье.

Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля

Определения

В этой работе используется определение интегралов и дифференциалов по РЛ. Для случая $0 < \alpha < 1$ и $f(t)$, отвечающих условию $f(t) = 0$ для $t < 0$, дробный интеграл определяется как:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (2.3)$$
$$0 < \alpha < 1, t > 0,$$

а выражение для производной дробного порядка имеет вид:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (2.4)$$
$$n-1 < \alpha < n,$$

где $\Gamma(\cdot)$ Эйлеравская гамма функция.

Свойства

Основные свойства дробных интегралов и производных следующие:

1. Если $f(z)$ является аналитической функцией z , то ее дробная производная ${}_a D_z^\alpha f(z)$ является аналитической функцией z и α .
2. Для $\alpha = n$, где n – целое число, операция ${}_a D_z^\alpha f(z)$ дает тот же самый результат, как и классическое интегрирование и дифференцирование порядка n .
3. Для $\alpha = 0$ операция ${}_0 D_z^\alpha f(z)$ идентична операции:

$${}_0 D_z^0 f(z) = f(z)$$

4. Дробное интегрирование и дифференцирование являются линейными операциями:

$${}_0 D_z^\alpha [af(z) + bg(z)] = a {}_0 D_z^\alpha f(z) + b {}_0 D_z^\alpha g(z).$$

5. Закон сложения индексов (полугрупповое свойство)

$${}_0 D_z^\alpha {}_0 D_z^\beta f(z) = {}_0 D_z^\beta {}_0 D_z^\alpha f(z) = {}_0 D_z^{\alpha+\beta} f(z)$$

справедливо при некоторых разумных ограничениях функции $f(z)$.

Метод преобразования Лапласа

Метод преобразования Лапласа является широко распространенным инструментом решения инженерных задач. В этом разделе мы вспомним некоторые базовые положения преобразования Лапласа целого порядка, а затем по аналогии рассмотрим эти положения для преобразования Лапласа дробного порядка.

Основные понятия о преобразовании Лапласа

Функция $F(s)$ комплексной переменной s , определенная как

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.5)$$

называется преобразованием Лапласа функции $f(t)$, которая называется оригиналом. Для существования интеграла (2.5) функция $f(t)$ должна быть экспонентой порядка α , которая означает, что существуют положительные константы M и T такие, что

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \quad \text{для всех } t > T.$$

Другими словами, функция $f(t)$ не должна расти быстрее, чем определенная экспоненциальная функция при $t \rightarrow \infty$.

Мы будем помечать преобразования Лапласа с помощью букв верхнего регистра, а оригиналы – буквами нижнего регистра.

Оригинал $f(t)$ можно восстановить из преобразования Лапласа $F(s)$ с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \operatorname{Re}(s) > c_0, \quad (2.6)$$

где c_0 лежит в правой половине плоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа (2.5).

Непосредственная оценка инверсного преобразования Лапласа с помощью формулы (2.6) часто оказывается сложной; однако иногда она дает по-

лезную информацию о поведении неизвестного оригинала $f(t)$, который мы рассматриваем.

Преобразование Лапласа свертки

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.7)$$

двух функций $f(t)$ и $g(t)$, которые равны нулю для $t < 0$, представляет собой произведение преобразований Лапласа этих функций:

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \quad (2.8)$$

при условии существования этих преобразований. Мы будем использовать свойство (2.8) для оценки преобразования Лапласа дробного интеграла Римана-Лиувилля.

Другое полезное свойство, которое нам понадобится – это формула для преобразования Лапласа производной целого порядка n функции $f(t)$:

$$L\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \quad (2.9)$$

которое может быть получено из определения (2.5), интегрированием по частям в предположении, что соответствующие интегралы существуют.

В последующих разделах преобразования Лапласа дробных производных мы рассмотрим при нижнем пределе $a = 0$.

Преобразование Лапласа дробных интегралов

Мы начнем с преобразования Лапласа дробного интеграла Римана-Лиувилля порядка $p > 0$, определенного в (2.3), который можно записать как свертку функций $g(t) = t^{p-1}$ и функции $f(t)$:

$${}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = t^{p-1} * f(t). \quad (2.10)$$

Преобразование Лапласа функции t^{p-1} равно [11]

$$G(s) = L\{t^{p-1}; s\} = \Gamma(p)s^{-p}. \quad (2.11)$$

Следовательно, используя формулу для преобразования Лапласа свертки (2.8), мы получим преобразование Лапласа интегралов дробного порядка Римана-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова:

$$L\{ {}_0D_t^{-p} f(t); s \} = s^{-p} F(s). \quad (2.12)$$

Преобразование Лапласа дробных производных

Сейчас давайте переключимся на оценку преобразования Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля, которое для этой цели запишем в форме:

$${}_0D_t^p f(t) = g^{(n)}(t), \quad (2.13)$$

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.14)$$

$$(n-1 \leq p \leq n).$$

Использование формулы для преобразования Лапласа производной целого порядка (2.9) дает

$$L\{ {}_0D_t^p f(t); s \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \quad (2.15)$$

Преобразование Лапласа функции $g(t)$ оценивается на основании (2.12) как:

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s). \quad (2.16)$$

Дополнительно из определения дробной производной Римана-Лиувилля (2.4) следует что

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0D_t^{p-k-1} f(t). \quad (2.17)$$

Подставляя (2.16) и (2.17) в (2.15) мы получим следующее окончательное выражение для преобразования Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля порядка $p > 0$:

$$L\{ {}_0D_t^p f(t); s \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}. \quad (2.18)$$

$(n-1 \leq p < n).$

Это преобразование Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля хорошо известно (см., например, [32] или [28]). Однако ее практическая применимость ограничена отсутствием физической интерпретации ограничения величин дробных производных нижним пределом $t = 0$. По крайней мере, сейчас такая интерпретация не известна.

Метод преобразования Фурье

Важнейшие факты преобразования Фурье

Экспоненциальное преобразование Фурье непрерывной функции $h(t)$ абсолютно интегрируемой в интервале $(-\infty, \infty)$ определяется как

$$F_e \{ h(t); \omega \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} h(t) dt, \quad (2.19)$$

а оригинал $h(t)$ может быть восстановлен из его преобразования Фурье $H_e(\omega)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_e(\omega) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (2.20)$$

Как и прежде, мы будем обозначать оригиналы строчными буквами, а их преобразования – прописными.

Преобразование Фурье свертки

$$h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (2.21)$$

двух функций $h(t)$ и $g(t)$, которые определены в диапазоне $(-\infty, \infty)$, равна произведению их преобразований Фурье:

$$F_e \{ h(t) * g(t); \omega \} = H_e(\omega) G_e(\omega) \quad (2.22)$$

при условии что $H_e(\omega)$ и $G_e(\omega)$ существуют. Мы будем использовать свойство (2.22) для оценки преобразования Фурье дробного интеграла Римана-Лиувилля и преобразования Фурье дробных производных.

Преобразование Фурье является полезным инструментом для анализа линейных динамических систем в частотной области.

Другим полезным свойством преобразования Фурье, которое часто используется в решении прикладных задач, это преобразование Фурье производных функции $h(t)$. А именно, если $h(t), h'(t), \dots, h^{(n-1)}(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$, тогда преобразование Фурье n -й производной $h(t)$ равно

$$F_e \{h^n(t); \omega\} = (-j\omega)^n H_e(\omega). \quad (2.23)$$

Преобразование Фурье является мощным инструментом анализа линейных динамических систем в частотной области.

Преобразование Фурье дробных интегралов

Сначала оценим Фурье преобразование интеграла дробного порядка Римана-Лиувилля с нижним пределом $a = -\infty$, т.е.

$${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau, \quad (2.24)$$

где мы полагаем $0 < \alpha < 1$.

Давайте начнем с преобразования Лапласа функции

$$h(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

(см. выражение (2.11)), которое может быть записано как

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-st} dt = s^{-\alpha}. \quad (2.25)$$

Примем $s = -j\omega$, где ω является вещественной величиной. Из теоремы Дирихле следует, что таком случае интеграл (2.25) сходится, если $0 < \alpha < 1$. Следовательно, мы немедленно получим преобразование Фурье функции

$$h_+(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & (t > 0) \\ 0, & (t \leq 0) \end{cases}$$

в виде

$$F_e \{h_+(t); \omega\} = (j\omega)^{-\alpha}. \quad (2.26)$$

Сейчас мы можем найти преобразование Фурье дробного интеграла Римана-Лиувилля (2.24), которое может быть записан как свертка (2.21) функций $h_+(t)$ и $g(t)$:

$${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} f(t) = h_+(t) * g(t). \quad (2.27)$$

Используя правило (2.22), мы получим

$$F_e \{{}_{-\infty}D_t^{-\alpha} g(t); \omega\} = (j\omega)^{-\alpha} G(\omega), \quad (2.28)$$

где $G(\omega)$ – преобразование Фурье функции $g(t)$.

Формула (2.28) дает также преобразование Фурье дробного интеграла Грюнвальда-Летникова ${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} g(t)$, потому что в рассматриваемом случае оно совпадает с преобразованием дробного интеграла Римана-Лиувилля.

Преобразование Фурье производных дробного порядка

Рассматривая нижний предел $a = -\infty$ и требуя корректного поведения $g(t)$ и ее производных при $t \rightarrow -\infty$ мы можем выполнить интегрирование по частям и записать интеграл Римана-Лиувилля в форме:

$${}_{-\infty}D_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{g^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau = {}_{-\infty}D_t^{\alpha-n} g^{(n)}(t), \quad (2.29)$$

$$n-1 < \alpha < n.$$

Преобразование Фурье (2.29) с использованием преобразования Фурье дробного интеграла Римана-Лиувилля (2.28) и затем преобразование Фурье производной целого порядка (2.23) дает следующую формулу для экспоненциального преобразования Фурье Римана-Лиувилля с нижним пределом $a = -\infty$:

$$\begin{aligned}
F_e\{D^\alpha g(t); \omega\} &= (-j\omega)^{\alpha-n} F_e\{g^{(n)}(t); \omega\} \\
&= (-j\omega)^{\alpha-n} (-j\omega)^n G(\omega) = (-j\omega)^\alpha G(\omega).
\end{aligned}
\tag{2.30}$$

Дифференциальные уравнения дробного порядка и передаточные функции

Система управления дробного порядка может быть описана с помощью дифференциального уравнения дробного порядка в форме [41, 43, 52]:

$$\begin{aligned}
a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) &= \\
= b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t),
\end{aligned}
\tag{2.31}$$

или с помощью непрерывной передаточной функции в виде [43, 52]:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}},
\tag{2.32}$$

где $D^\gamma \equiv {}_0 D_t^\gamma$; a_k ($k = 0, \dots, n$), b_k ($k = 0, \dots, m$) – константы; и α_k ($k = 0, \dots, n$), β_k ($k = 0, \dots, m$) – произвольные вещественные числа.

Без потери общности мы можем полагать, что $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$, и $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$.

Глава 3

КОНТРОЛЛЕРЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Определение дробного $PI^\lambda D^\delta$ -контроллера

$PI^\lambda D^\delta$ -контроллер дробного порядка (КДП) был предложен в [42 – 44] как обобщение ПИД контроллера с интегратором вещественного порядка λ и дифференциатором вещественного порядка δ . Передаточная функция такого контроллера в области Лапласа имеет вид:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\delta, \quad (\lambda, \delta > 0), \quad (3.1)$$

где K_p – константа пропорциональности, T_i – константа интегрирования, а T_d – константа дифференцирования. Как видно из рис. 3.1, внутренняя структура контроллера дробного порядка содержит параллельное соединение трех частей: пропорциональной, интегрирующей и дифференцирующей.

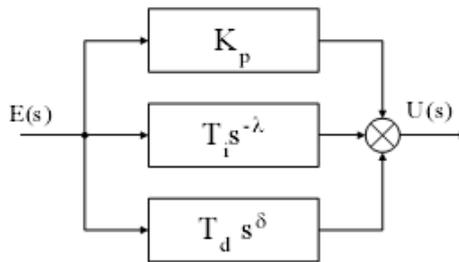


Figure 3.1: General structure of a $PI^\lambda D^\delta$ controller.

Передаточная функция (3.1) соответствует во временной области дифференциальному уравнению дробного порядка (3.2)

$$u(t) = K_p e(t) + T_{i0} D_t^{-\lambda} t(t) + T_{d0} D_t^\delta t(t). \quad (3.2)$$

Приняв $\lambda = 1$ и $\delta = 1$, мы получим классический ПИД контроллер. Если $\lambda = 0$ и $T_i = 0$, мы получим PD^δ контроллер и т.д. Все эти типы контроллеров являются частными случаями контроллера дробного порядка, который является более гибким и дает возможность лучше приспособливаться к динамическим свойствам управляемых систем дробного порядка.

Необходимо заметить, что другой вид контроллера дробного порядка, который характеризуется *band-limited lead effect*, можно найти в доступной литературе [34, 36]:

$$C(s) = K \left(\frac{1 + \tau s^r}{1 + \tau' s^r} \right), \quad r \in R, K \in R, \tau' < \tau. \quad (3.3)$$

Этот тип контроллеров может быть реализован с использованием рекурсивного распределения полюсов и нулей [35].

Есть много других известных контроллеров дробного порядка. В качестве примера можно отметить *CRONE* контроллер [34], интеграл не целого порядка и его применение в управлении [23] или *TID* компенсатор [22], который имеет сходство по структуре с ПИД контроллером, но в отличие от него пропорциональный компонент заменен компонентом с наклонной АЧХ, имеющей передаточную функцию с показателем степени при s равном $(-1/n)$. Результирующая передаточная функция *TID* (*tilted, integrator, differentiator*) контроллера имеет вид

$$C(s) = \frac{T}{s^{1/n}} + \frac{I}{s} + Ds, \quad (3.4)$$

где T , I и D – константы контроллера и n – ненулевое вещественное число, лежащее предпочтительно между 2 и 3. Передаточная функция (3.4) более точно аппроксимирует оптимальную передаточную функцию и позволяет получить обобщенную характеристику, которая ближе к теоретически оптимальной характеристике, определенной Боде [3].

Свойства и характеристики контроллера

Общие рассуждения

Можно ожидать, что $PI^\lambda D^\delta$ -контроллер (3.1) может улучшить характеристики систем контроля за счет введения большего числа настраиваемых опций, которые интуитивно иллюстрируются на рис. 3.2.

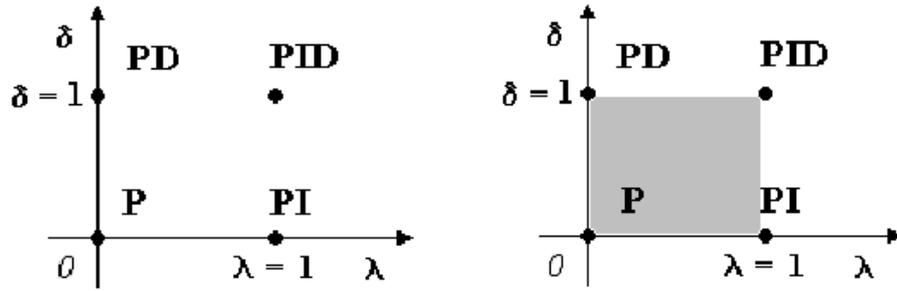


Figure 3.2: *PID controller: from points to plane.*

Передаточная функция ПДК с комплексными нулями и полюсами, расположенными в любом месте левой полуплоскости комплексной плоскости s , может быть переписана как

$$C(s) = K \frac{(s/\omega_n)^{\delta+\lambda} + (2\zeta s^\lambda)/\omega_n + 1}{s^\lambda}, \quad (3.5)$$

где K – коэффициент усиления, ζ – безразмерный коэффициент затухания, а ω_n – собственная частота. Обычно мы выбираем $\zeta < 1$. При $\zeta = 1$, условие называется условием критического затухания [8].

Для широкого класса управляемых объектов мы рекомендуем дробный $PI^n D^\delta$ -контроллер, который является частным случаем $PI^\lambda D^\delta$ -контроллер, где $\lambda = n$, $n \in N$ и $\delta \in R$. Интегратор целого порядка является важным для исключения статической ошибки. Но с другой стороны дробный интеграл также важен для получения идеальной петлевой передаточной функции Боде, характеризующейся постоянством фазового сдвига в желаемом частотном диапазоне (например, [1, 3, 23, 51]).

Идеальная передаточная функция в петле по Боде

Боде предложил идеальную форму передаточной характеристики в петле ОС в своей работе по проектированию усилителей с обратной связью в 1945. Идеальная петлевая передаточная функция имеет вид:

$$L(s) = \left(\frac{s}{\omega_{gc}} \right)^\alpha, \quad (3.6)$$

где ω_{gc} – желаемая частота среза, а α – наклон ската частотной характеристики.

Запас по фазе равен $\Phi_m = \pi(1 + \alpha/2)$ для всех значений коэффициента усиления. Запас по амплитуде A_m бесконечный. Постоянные фазовые сдвиги 60° , 45° и 30° соответствуют наклонам АЧХ $\alpha = -1,33$, $-1,5$, $-1,66$.

Кривая Найквиста для идеальной передаточной функции по Боде является просто прямой линией из начала координат под углом $\arg(L(j\omega)) = \alpha\pi/2$ (см. [1, 39]).

Передаточная функция по Боде (3.6) может быть использована как опорная система в следующей форме:

$$G_c(s) = \frac{K}{s^\alpha + K} \quad (0 < \alpha < 2), \quad (3.7)$$

$$G_o(s) = \frac{K}{s^\alpha} \quad (0 < \alpha < 2), \quad (3.8)$$

где $G_c(s)$ – передаточная функция замкнутой петли, а $G_o(s)$ – передаточная функция в открытой петле (рис. 3.3).

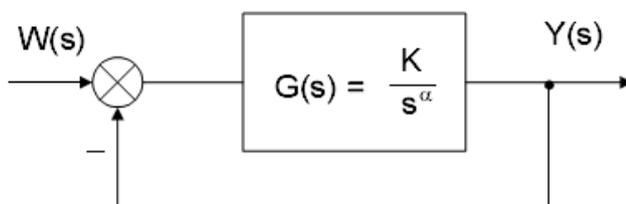


Figure 3.3: Bode's ideal loop.

Обобщенные характеристики идеальной передаточной функции по Боде следующие:

(a) Открытая петля:

АЧХ: постоянный наклон $-\alpha 20$ дБ/дек. (рис. 3.4);

- Частота перехода: функция K ;
- ФЧХ: горизонтальная линия на уровне $-\alpha\pi/2$ (рис. 3.4);
- Кривая Найквиста: прямая линия с аргументом $-\alpha\pi/2$.

(b) Замкнутая петля:

- Запас по амплитуде: $A_m = \text{бесконечный}$;
 - Запас по фазе: постоянная: $\Phi_m = \pi(1 - \alpha/2)$;
 - Переходная характеристика: $y(t) = Kt^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-Kt^\alpha)$,
- где $E_{\alpha, \alpha+1}$ – функция Миттаг-Леффлера двух параметров [43].

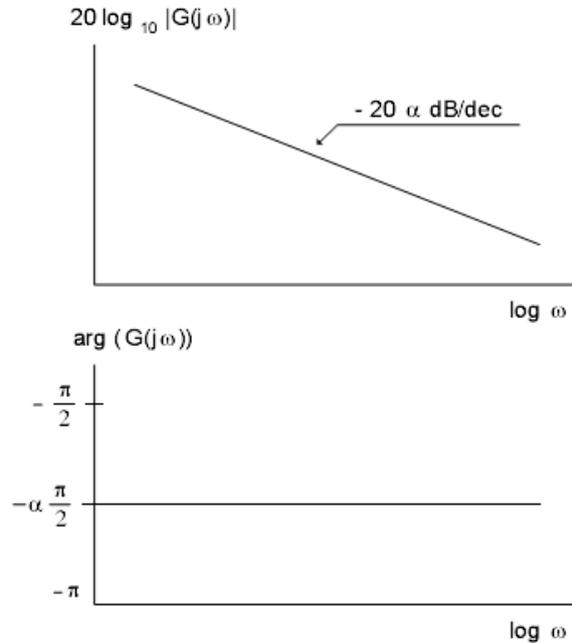


Figure 3.4: Bode plots of transfer function (3.8).

Иллюстративный пример

Мы можем проиллюстрировать свойства управления дробного порядка на примере. Предположим, что передаточная функция мотора постоянного тока

$$G(s) = \frac{K_m}{Js(s+1)}, \quad (3.9)$$

с полезной нагрузкой J . Наша задача обеспечить постоянный фазовый сдвиг вне зависимости от изменения нагрузки.

Предположим, что мы хотели бы иметь систему с замкнутой петлей, которая является нечувствительной к изменению усиления с постоянным фазовым сдвигом в 60° . Идеальная передаточная функция в петле по Боде, которая дает этот фазовый сдвиг равна

$$G_o(s) = \frac{1}{s^3 \sqrt{s}}. \quad (3.10)$$

Так как $G_o(s) = C(s)G(s)$, то мы можем найти передаточную функцию контроллера в следующем виде

$$C(s) = \frac{J}{K_m} \left(s^{2/3} + \frac{1}{s^{1/3}} \right) = K \left(s^{2/3} + \frac{1}{s^{1/3}} \right), \quad (3.11)$$

которая является особым случаем передаточной функции $PI^\lambda D^\delta$ контроллера, где $K = J/K_m$ является константой контроллера.

Фазовый сдвиг управляемой системы с прямым контуром контроллера G_c равен

$$\Phi_m = \arg[C(j\omega_0)G(j\omega_0)] + \pi, \quad (3.12)$$

где ω_0 – частота среза.

Полученный фазовый сдвиг равен

$$\Phi_m = \arg[C(j\omega)G(j\omega)] + \pi = \left[\frac{1}{(j\omega)^{4/3}} \right] + \pi = \pi - \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}. \quad (3.13)$$

Постоянный фазовый сдвиг не зависит от изменения нагрузки и коэффициента K системы, а ФЧХ представляет горизонтальную линию на уровне $-2\pi/3$.

Переходная характеристика замкнутой петли управления может быть выражена в виде:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{1+1/3} + 1)} \right\} = t^{1+1/3} E_{1+1/3, 2+1/3} \left(-t^{1+1/3} \right), \quad (3.14)$$

где переходная характеристика является независимой от нагрузки и $\alpha = 4/3$.

Проектирование параметров контроллера

Настройка параметров $PI^\lambda D^\delta$ контроллера осуществляется по заданным требованиям. Эти требования включают в себя, например, коэффициент затухания, статическая ошибка (e_{ss}), динамические свойства и т.д. Один из широко распространенных методов является метод доминирующих корней [37],

основанный на заданной мере стабильности и коэффициенте затухания замкнутой петли управления. Полагая, что желаемые доминирующие полюса являются парой комплексно-сопряженных полюсов $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$, находят коэффициент затухания ζ и собственную частоту ω_n .

Коэффициент затухания (меру стабильности) и собственную частоту можно найти из соотношений $\sigma = \zeta\omega_n$ и $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Проектные параметры K_p , T_i , λ , T_d и δ могут быть определены численно из характеристического уравнения. В частности, для простого объекта управления с моделью $P(s)$ это можно сделать, решая

$$\min_{K_p, T_i, \lambda, T_d, \delta} \|C(s)P(s) + 1\|_{s=-\sigma \pm j\omega_d}.$$

Другой возможный путь для получения параметров контроллера – использование формулы настройки, основанной на заданных коэффициенте усиления и фазовом сдвиге [52]:

$$\begin{cases} \Re[C(j\omega_p)]\Re[P(j\omega_p)] - \Im[C(j\omega_p)]\Im[P(j\omega_p)] = -\frac{1}{A_m}, \\ \Re[C(j\omega_p)]\Im[P(j\omega_p)] + \Im[C(j\omega_p)]\Re[P(j\omega_p)] = 0, \\ \Re[C(j\omega_g)]\Re[P(j\omega_g)] - \Im[C(j\omega_g)]\Im[P(j\omega_g)] = -\cos \Phi_m, \\ \Re[C(j\omega_g)]\Im[P(j\omega_g)] + \Im[C(j\omega_g)]\Re[P(j\omega_g)] = -\sin \Phi_m, \end{cases}$$

где Φ_m – запас по фазе, A_m – запас по усилению, ω_p и ω_g – частота среза (0 дБ).

Последним, но не менее важным, мы должны отметить оптимизационный алгоритм, основанный на минимизации интеграла абсолютной ошибки (IAE) [44]:

$$IAE(t) = \int_0^t |e(t)| dt = \int_0^t |w(t) - y(t)| dt,$$

где $w(t)$ – желаемая величина замкнутой петли управления, а $y(t)$ – реальная величина замкнутой петли управления.

Этот метод не гарантирует желаемой меры стабильности замкнутой петли управления. Мера стабильности надо проверять дополнительно. Мы можем использовать метод, описанный в [39].

Глава 4

РАЗЛОЖЕНИЕ НА ЦЕПНЫЕ ДРОБИ (РЦД)

РЦД: Общее введение

Разложение на простые дроби используется как инструмент для проектирования цепей, используемых для аналогового моделирования динамических систем дробного порядка. Использование РЦД позволяет унифицировать проектирование двух известных видов таких цепей, а именно, лестничные цепи и древовидные цепи. Кроме этого вводится понятие о вложенных многопетлевых системах управления, которые соответствуют РЦД. Предлагаемый метод проектирования аналоговых цепей для моделирования динамических систем дробного порядка иллюстрируется несколькими примерами практической реализации вместе с соответствующими измеренными характеристиками.

РЦД и аппроксимирующие функции

Хорошо известно, что разложение на простые дроби является методом оценки функций, которые часто сходятся более быстро, чем разложение в степенные ряды, и сходимость гораздо больше в области комплексной частоты [45]. Результат такой аппроксимации для иррациональной функции $G(s)$ может быть выражен в форме:

$$\begin{aligned} G(s) &\cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} = \\ &= a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s)} \frac{b_2(s)}{a_2(s)} \frac{b_3(s)}{a_3(s)} \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $a_i(s)$ и $b_i(s)$ – рациональные функции переменной s или являются константами. Применение метода приводит к рациональной функции $\mathcal{G}(s)$, которая является аппроксимацией иррациональной функции $G(s)$.

С другой стороны для целей интерполяции рациональные функции иногда лучше аппроксимировать полиномами. Это, проще говоря, благодаря их способности моделировать функции с полюсами. (Как будет видно позже, точки ветвления цепей можно рассматривать как накопление месторасположения нулей и полюсов). Эти техники основаны на аппроксимации иррациональных функций рациональными функциями, определенными как отношение двух полиномов переменной s :

$$G(s) \cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(s)}{Q_\nu(s)} = \frac{p_0 + p_1s + \dots + p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1s + \dots + q_\nu s^\nu} \quad (4.2)$$

$$m + 1 = \mu + \nu + 1$$

проходя через точки $(s_i, G(s_i)), \dots, (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$.

РЦД и стабильность линейных систем

Хорошо известно, что разложение на цепные дроби можно использовать для исследования стабильности линейных систем. Для этого характеристический полином дифференциального уравнения системы $Q(s)$ должен быть разделен на две части: "четную" часть (содержащую четные степени s) и "нечетную" часть (содержащую нечетные степени s), т.е.

$$Q(s) = m(s) + n(s).$$

Затем эти две части характеристического полинома используются для создания ее *тестовой функции* в форме дроби, в которой высшая степень s содержится в знаменателе:

$$R(s) = \frac{m(s)}{n(s)} \text{ или } R(s) = \frac{n(s)}{m(s)}.$$

Рациональная функция $R(s)$ должна быть записана в виде непрерывной дроби:

$$R(s) = \frac{1}{b_1(s) + \frac{1}{b_2(s) + \frac{1}{\dots \dots \dots \frac{1}{b_{n-1}(s) + \frac{1}{b_n(s)}}}}}$$
(4.3)

Если $b_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, тогда система стабильна. Если некоторые b_k отрицательны, то система нестабильна.

Рассматривая непрерывную дробь (4.3) как инструмент проектирования соответствующей LC цепи, мы можем заключить, что стабильность линейной системы эквивалентна тому, что ее тестовую функцию можно реализовать с помощью пассивных электрических компонентов.

РДЦ и вложенные многопетлевые управляющие системы

Давайте сейчас установим интересную новую связь между непрерывными дробями и вложенными многопетлевыми управляющими системами.

Во-первых, вспомним известный факт, состоящий в том, что передаточная функция $R(s)$ петли управления с отрицательной обратной связью, показанная на рис. 4.1, дается выражением [8]

$$R(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$
(4.4)

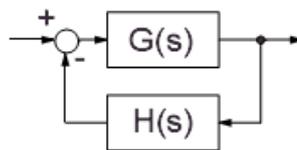


Figure 4.1: A control loop with a negative feedback.

Из (4.4) немедленно следует, что передаточная функция схемы, изображенной на рис. 4.2 равна

$$P_{2n}(s) = \frac{1}{1 + 1 \cdot Y_{2n}^*(s)} = \frac{1}{Y_{2n}(s)}$$
(4.5)

где $Y_{2n}(s) = Y_{2n}^*(s) + 1$.

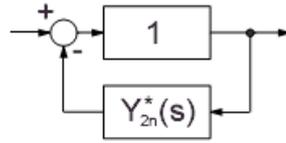


Figure 4.2: Nested multiple-loop control system – level 1.

Используя уравнения (4.4) и (4.5), мы получим передаточную функцию системы, изображенной на рис. 4.3:

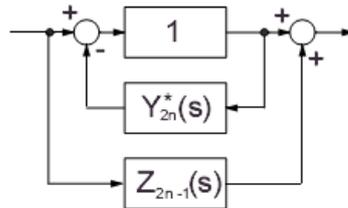


Figure 4.3: Nested multiple-loop control system – level 2.

$$Q_{2n-1}(s) = Z_{2n-1}(s) + P_{2n}(s) = Z_{2n-1}(s) + \frac{1}{Y_{2n}(s)}. \quad (4.6)$$

Комбинируя уравнения (4.4) и (4.5) мы найдем передаточную функцию вложенной многопетлевой системы, изображенной на рис. 4.4:

$$\begin{aligned} P_{2n-2}(s) &= \frac{Q_{2n-1}(s)}{1 + Q_{2n-1}(s)Y_{2n-2}(s)} = \frac{1}{Y_{2n-2}(s) + \frac{1}{Q_{2n-1}(s)}} = \\ &= \frac{1}{Y_{2n-2}(s) + \frac{1}{Z_{2n-1}(s) + \frac{1}{Y_{2n}(s)}}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

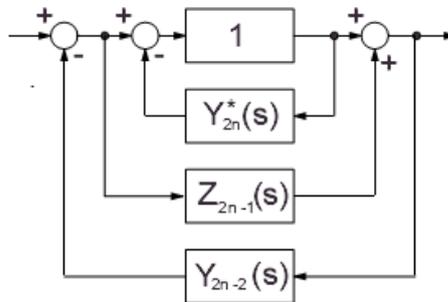


Figure 4.4: Nested multiple-loop control system – level 3.

Тогда передаточную функцию системы, показанной на рис. 4.5, можно записать в виде соотношения

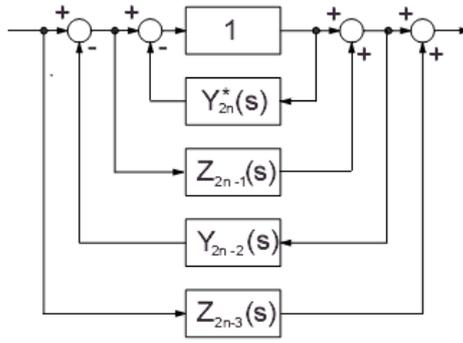


Figure 4.5: Nested multiple-loop control system – level 4

$$\begin{aligned}
 Q_{2n-3}(s) &= Z_{2n-3}(s) + P_{2n-2}(s) = \\
 &= Z_{2n-3}(s) + \frac{1}{Y_{2n-2}(s) + \frac{1}{Z_{2n-1}(s) + \frac{1}{Y_{2n}(s)}}}. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, мы получим передаточную функцию вложенной многопетлевой системы, изображенной на рис. 4.6, в форме непрерывных цепных дробей, которые идентичны уравнению (4.1)

$$\begin{aligned}
 Z(s) = Z_1(s) + \frac{1}{Y_2(s) + \frac{1}{Z_3(s) + \frac{1}{Y_4(s) + \frac{1}{\dots}}}} \\
 \dots \\
 Y_{2n-2}(s) + \frac{1}{Z_{2n-1}(s) + \frac{1}{Y_{2n}(s)}} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

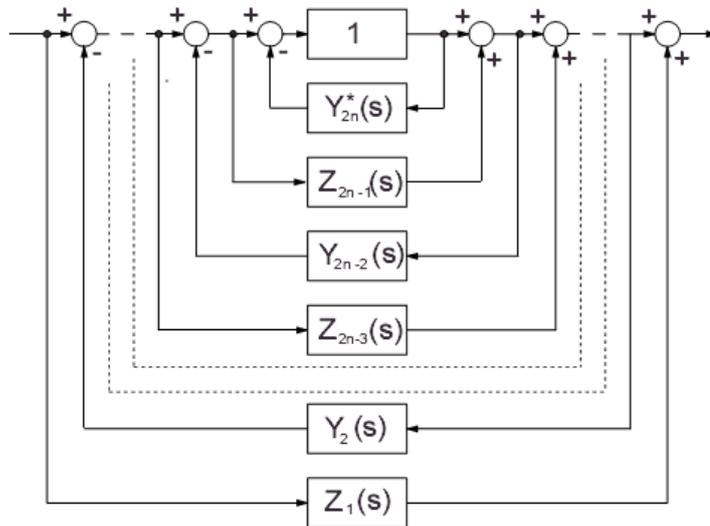


Figure 4.6: Nested multiple-loop control system of the first type.

Похожим образом тому, что мы рассмотрели, можно получить РЦД передаточной функции другого интересного типа вложенной многопетлевой системы управления, изображенной на рис. 4.7.

Оба типа вложенных многопетлевых систем, представленные в этом разделе, можно использовать для моделирования и реализации произвольных трансцендентных функций. Для этого передаточную функцию надо представить в виде цепной дроби, которая после ограничения может быть представлена в виде одной из вложенных многопетлевых систем, изображенных на рис. 4.6 или 4.7.

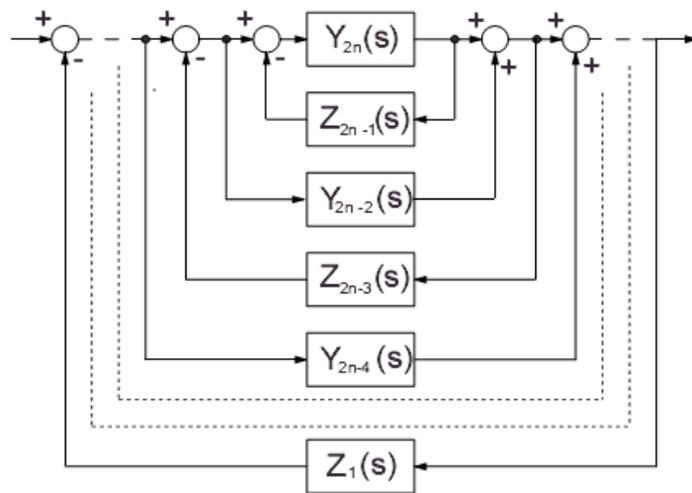


Figure 4.7: Nested multiple-loop control system of the second type.

РЦД и рациональные и иррациональные числа

Каждое рациональное или иррациональное число может быть записано в форме РЦД. По существу процесс нахождения разложения в виде непрерывной дроби содержит два шага: если дробь m/n больше 1, тогда деление. Иначе дробь m/n записывают как $1/(n/m)$ и возвращаются к первому шагу. Продолжают до тех пор, пока не получают в числителе 1. РЦД часто используют для того, чтобы получить хорошую рациональную аппроксимацию для вещественных чисел. Давайте рассмотрим числа, записанные в виде: $a_0 + b_1/(a_1 + b_2/(a_2 + b_3/(a_3 + \dots)))$. В "простых" непрерывных дробях все $b_i, \forall i$ равны 1 и число может быть переписано как $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Пример 4.5.1.

РЦД для числа π , которое дает наилучшую аппроксимацию данного порядка можно представить как $[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, \dots]$. Очень большое число 292 обозначает, что последующие члены дают хорошую аппроксимацию [13].

$$[3, 7, 15, 1] = [3, 7, 16] = 355/113 = 3,14159292\dots$$

Глава 5

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДРОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Предварительные соображения

Существует много подходов к рациональной аппроксимации операторов дробного порядка. Хорошо известно, что для целей интерполяции и оценки рациональные функции представляют полиномами благодаря их способности моделировать функции нулями и полюсами. Другими словами для целей оценки рациональные аппроксимации часто сходятся гораздо быстрее, чем степенные ряды и имеют шире область сходимости в комплексной плоскости.

По существу кроме IIR формы аппроксимации мы можем также использовать FIR форму аппроксимации, но IIR форма предпочтительнее FIR, т.к. имеет нули и полюса. Для хорошей аппроксимации передаточная функция должна быть стабильной и минимально фазовой.

С другой стороны, необходимо напомнить о диффузивной реализации, предложенной в [29] и [14]. Несмотря на то, что отправные положения в этих работах совершенно отличны от отправных положений, рассматриваемых в данной книге, полученная в частотной области аппроксимация, как можно видеть, представляет собой рациональную аппроксимацию операторов дробного порядка. Более того, эти аппроксимации демонстрируют общие свойства, которые можно наблюдать во всех хороших рациональных аппроксимациях: они имеют нули и полюса, чередующиеся на отрицательной вещественной оси комплексной плоскости s , а расстояние между последовательными полюсами и нулями уменьшается с улучшением аппроксимации за счет роста порядка полиномов числителя и знаменателя. Возможно, этот факт был отмечен в первую очередь [17], где возникла следующая идея: плотность чередования простых полюсов и нулей вдоль линии в s плане, некоторым образом, эквивалентна обрезанию ветвей; и s^α , $0 < \alpha < 1$, выглядит как оператор, имеющий обрезание ветвей вдоль отрицательной реальной оси для аргумен-

тов s в диапазоне $(-\pi, \pi)$, но с иным, свободным расположением нулей и полюсов.

Основной метод РЦД

В основном [10], рациональная аппроксимация функции $G(s) = s^{-\alpha}$, $1 < \alpha < 1$ (дробный оператор интегрирования в частотной области) может быть получен путем РЦД функций:

$$H_h(s) = \frac{1}{(1 + sT)^\alpha} \quad (5.1)$$

$$H_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\alpha \quad (5.2)$$

где $H_h(s)$ – аппроксимация для высоких частот ($\omega T \gg 1$), а $H_l(s)$ – аппроксимация для низких частот ($\omega \ll 1$).

Пример 5.2.1.

Выполняя РЦД функции (5.1), с $T = 1$, $\alpha = 0,5$, мы получим:

$$H_1(s) = \frac{0,3513s^4 + 1,405s^3 + 0,8433s^2 + 0,1574s + 0,008995}{s^4 + 1,333s^3 + 0,478s^2 + 0,064s + 0,002844}$$

Пример 5.2.2.

Выполняя РЦД функции (5.2), с $T = 1$, $\alpha = 0,5$, мы получим:

$$H_2(s) = \frac{s^4 + 4s^3 + 2,4s^2 + 0,448s + 0,0256}{9s^4 + 12s^3 + 4,32s^2 + 0,576s + 0,0256}$$

Метод Карлсона

Метод, предложенный Карлсоном в [4, 5], выведенный из регулярного процесса Ньютона, используемого для итеративной аппроксимации α -го корня, может быть рассмотрен как принадлежащий к этой группе. Исходной точкой этого метода является установление следующей зависимости:

$$(H(s))^{1/\alpha} - (G(s)) = 0; \quad H(s) = (G(s))^\alpha \quad (5.3)$$

Определяя $\alpha = 1/q$, $m = q/2$, на каждой итерации, начиная с начального значения $H_0(s) = 1$, аппроксимирующая рациональная функция получается в виде:

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (5.4)$$

Пример 5.3.1.

Начиная с $H(s) = (1/s)^{1/2}$, $H_0(s) = 1$, после двух итераций получим:

$$H_3(s) = \frac{s^4 + 36s^3 + 126s^2 + 84s + 9}{9s^4 + 84s^3 + 126s^2 + 36s + 1}$$

Метод Мацуды

Метод, предложенный в [27], основан для аппроксимации иррациональных функций рациональными, полученными РЦД и подгонка первоначальной функции на множестве логарифмически расположенных точек. Полагая, что выбранные точки расположены в s_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, аппроксимация принимает вид:

$$H(s) = a_0 + \frac{s-s_0}{a_1 +} \frac{s-s_1}{a_2 +} \frac{s-s_2}{a_3 +} \dots, \quad (5.5)$$

где

$$a_i = v_i(s_i), \quad v_0(s) = H(s), \quad v_{i+1}(s) = \frac{s-s_i}{v_i(s) - a_i} \quad (5.6)$$

Пример 5.4.1.

При условиях $G(s) = (1/s)^{1/2}$, $f_{initial} = 1$, $f_{final} = 100$ $f_k = \{1, 1.7783, 3.1623, 5.6234, 10, 17.783, 31.623, 56.234, 100\}$, получим:

$$H_4(s) = \frac{0.08549s^4 + 4.877s^3 + 20.84s^2 + 12.995s + 1}{s^4 + 13s^3 + 20.84s^2 + 4.876s + 0.08551}$$

Метод Оусталуца

Метод [34, 35, 36] основан на аппроксимации функции вида:

$$H(s) = s^\mu, \quad \mu \in R^+ \quad (5.7)$$

с помощью рациональной функции:

$$\hat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + s / \omega_k}{1 + s / \omega'_k} \quad (5.8)$$

используя следующую систему синтезируемых формул:

$$\begin{aligned} \omega'_0 &= \alpha^{-0,5} \omega_u; & \omega_0 &= \alpha^{0,5} \omega_u; & \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} &= \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha \eta > 1; \\ \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k} &= \eta > 0; & \frac{\omega_k}{\omega'_k} &= \alpha > 0; & N &= \frac{\log(\omega_N / \omega_0)}{\log(\alpha \eta)}; & \mu &= \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \eta)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

с ω_u , соответствующей частоте единичного усиления и центральной частоте полосы частот, геометрически распределенной вокруг нее. Отсюда

$\omega_u = \sqrt{\omega_h \omega_b}$, ω_h , ω_b – высокая и низкая частоты полосы частот.

Пример 5.5.1.

Используя метод Оусталупа с:

$$\omega_h = 10^2, \quad \omega_b = 10^{-2},$$

в котором мы имеем $\alpha = \eta = 2,5119$, полученная аппроксимация будет

$$H_5(s) = \frac{s^5 + 74,97s^4 + 768,5s^3 + 1218s^2 + 298,5s + 10}{10s^5 + 298,5s^4 + 1218s^3 + 768,5s^2 + 74,97s + 1}.$$

Метод Шареффа

Этот метод, предложенный в [6, 49], который очень близок методу Оусталупа, основан на аппроксимации функции вида

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \quad (5.10)$$

с помощью отношения полиномов от s в форме разложения на множители:

$$\hat{H}(s) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (5.11)$$

где коэффициенты вычисляются так, чтобы получить максимальное отклонение от исходной амплитудной характеристики в частотной области y дБ. Определяя

$$a = 10^{y/10(1-\alpha)}, \quad b = 10^{y/10\alpha}, \quad ab = 10^{y/10\alpha(1-\alpha)} \quad (5.12)$$

полюса и нули аппроксимирующей рациональной функции получаем применением следующих формул:

$$p_0 = p_T \sqrt{b}, \quad p_i = p_0(ab)^i, \quad z_i = ap_0(ab)^i \quad (5.13)$$

Число полюсов и нулей связано с желаемой полосой и допустимой ошибкой, используя выражение:

$$N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right\rceil + 1 \quad (5.14)$$

Пример 5.6.1.

Для $y = 2$ дБ, $p_T = 1$, $\omega \in [10^{-1}, 10^5]$, полученная аппроксимация равна:

$$H_6(s) = \frac{6,3s^4 + 74,84s^3 + 121,1s^2 + 29,79s + 0,9986}{s^5 + 29,85s^4 + 121,8s^3 + 76,85s^2 + 7,497s + 0,1}$$

Другие подходы

Метод Роя

Сейчас давайте рассмотрим подход Дутта Роя к аналоговой реализации интегратора $s^{1/2}$ [10, Приложение].

Полагая в формуле Хованского [19, р. 107, (2.16)] $a = 1$, получим следующее РЦД для $s^{1/2}$:

$$s^{1/2} = 1 + \frac{s-1}{2 + \frac{s-1}{2 + \frac{s-1}{2 + \dots}}} \quad (5.15)$$

Конвергенты этой цепной дроби равны:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{s+1}{2}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3s+1}{s+3}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{s^2+6s+1}{4s+4}, \quad (5.16)$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{5s^2+10s+1}{s^2+10s+5}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{s^3+15s^2+15s+1}{6s^2+20s+6}. \quad (5.17)$$

Мы получили рациональную аппроксимацию интегратора половинного порядка другим методом, который также можно использовать для аналоговой реализации контроллера дробного порядка.

Метод Ванга

Этот метод был разработан для конструирования резистивно-емкостных лестничных цепей и передающих линий, которые обладают обобщенным импедансом Варбурга $A^{s-\alpha}$, где A – является независимой от угловой частоты, а $0 < \alpha < 1$. Этот импеданс появляется на электродно/электролитном переходе, и др. Импеданс лестничной цепи или передающей линии может быть оценен и переписан как РЦД (см. также (6.1) и рис. 6.2):

$$Z(s) = R_0 + \frac{1}{C_0s + R_1} \frac{1}{C_1s + R_2} \frac{1}{C_2s + \dots} \quad (5.18)$$

Величины резисторов и конденсаторов цепи определяются соотношениями

$$R_k = 2h^\alpha P(\alpha) \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1-\alpha)} - h^\alpha \delta_{ko}$$

$$C_k = h^{1-\alpha} \frac{\Gamma(k+1-\alpha)}{P(\alpha)\Gamma(k+1+\alpha)}$$

$$P(\alpha) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (5.19)$$

где $0 < \alpha < 1$, h – произвольное небольшое число, $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма функцию, δ_{ko} – символ Кронекера, а k – целое число, $k \in [0, \infty]$.

Метод Джонса

Этот метод был описан в [17] и был разработан для дробного оператора s^α , который аппроксимируется рациональной функцией $P(s)/Q(s)$.

Для того, чтобы реализация была конечным числом элементов цепи, аппроксимация $P(s)/Q(s)$ должна быть положительной рациональной функцией. Это означает, что корни $p_i P(s)$ и корни $q_i Q(s)$ являются чередующимися на отрицательной вещественной оси в s -плане. Было обнаружено, что корни p_i и q_i появляются в виде взаимных пар для недемпфированной собственной частоты и коэффициента ζ . Таким образом, для нечетных N аппроксимация имеет вид:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \prod_{i=1}^{N+1/2} \frac{(s + \omega p_i)}{(s + \omega/p_i)}.$$

Так как она симметричная, то сложная проблема уменьшается в половину, когда N – нечетная.

Глава 6

ОБЩИЙ ПОДХОД К ФРАКТАНСНЫМ УСТРОЙСТВАМ

Введение во фрактансные устройства

Что такое фрактанс?

Схема, проявляющая поведение дробного порядка, называется *фрактансом* [43]. Фрактансные устройства имеют следующие характеристики [31]. Во-первых, фазовый угол является постоянным и не зависит от частоты в широком диапазоне частот. Во-вторых, на его основе можно сконструировать фильтр, имеющий умеренные характеристики, которые нельзя реализовать, используя обычные устройства.

В настоящее время известны три основных фрактансных устройства. Наиболее популярное из них – лестничная схема. Также достаточно часто используются цепи с ветвящейся структурой и некоторые передающие линии (или симметричные лестничные цепи).

Проектирование фрактансов можно выполнить легко, используя любую вышерассмотренную рациональную аппроксимацию или усеченное РЦД, которое также дает рациональную аппроксимацию (см., например, [15]). Усеченное РЦД не требует никаких преобразований; рациональная аппроксимация, основанная на любых других методах, должна быть преобразована к форме цепной дроби. Если все коэффициенты полученного РЦД являются положительными, тогда фрактанс можно сделать на основе классических элементов (резисторов и конденсаторов). Если некоторые из коэффициентов отрицательны, тогда фрактанс можно сделать с помощью конверторов отрицательного импеданса (КОИ).

Конверторы отрицательного импеданса

Можно показать, что используя РЦД для аналоговой реализации произвольных передаточных функций, можно получить отрицательные импедансы. Их исследование не известно. Например, в статье [10] Дутта Рой, обращаясь к РЦД Хованского для $x^{1/2}$, найденном в [19], делает замечание, что

"... если x заменить на комплексную частоту s , то реализация потребует отрицательных сопротивлений. Таким образом, РЦД [Хованского] не кажется полезным для реализации фрактальной индуктивности или емкости."

Затем он описывает метод для обхода этой трудности, который дает РЦД с положительными коэффициентами.

Однако возможность реализации отрицательных импедансов в электрических схемах была еще отмечена Боде [3, гл. 9]. Позже, в 1970, когда появились операционные усилители, которые существенно упростили создание схем, проявляющих отрицательное сопротивление, отрицательную емкость, отрицательную индуктивность. Такие схемы называются конверторами отрицательного импеданса [9].

Простейшая схема КОИ (или токового инвертора) изображена на рис. 6.1. Схема содержит ОУ, два резистора с равными сопротивлениями R и компонент с импедансом Z . В целом схема, рассматриваемая как единый элемент, имеет отрицательный импеданс $-Z$. Это означает, что $I_{in} = V_{in}/(-Z)$.

Для примера, поставив резистор сопротивлением R_Z , вместо элемента $-Z$, мы получим схему, которая ведет себя как отрицательное сопротивление $-R_Z$. Отрицательное сопротивление означает, что если такой элемент, например, с сопротивлением -10 кОм, соединить последовательно с классическим резистором сопротивлением 20 кОм, то результирующее сопротивление будет равно 10 кОм.

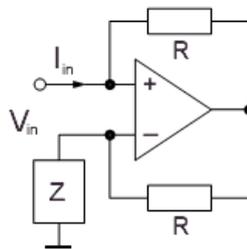


Figure 6.1: Negative-impedance converter.

Лестничная цепь

Лестничные цепи могут аппроксимировать дробный оператор более эффективно, чем обычные цепи с сосредоточенными параметрами [10, 30].

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 6.2, где $Z_{2k-1}(s)$ и $Y_{2k}(s)$, $k = 1, \dots, n$, дают импедансы схемных элементов. Результирующий импеданс всей схемы $Z(s)$ может быть найден легко, если мы рассмотрим его в направлении справа-налево:

$$Z(s) = Z_1(s) + \frac{1}{Y_2(s) + \frac{1}{Z_3(s) + \frac{1}{Y_4(s) + \frac{1}{\dots + \frac{1}{Y_{2n-2}(s) + \frac{1}{Z_{2n-1}(s) + \frac{1}{Y_{2n}(s)}}}}}} \quad (6.1)$$

Взаимосвязь между лестничной цепью с ограниченным числом элементов, показанной на рис. 6.2, и цепной дробью (6.1) обеспечивает легкий метод проектирования схемы с заданным импедансом $Z(s)$. Для этого надо получить РЦД для $Z(s)$. Затем полученные конкретные выражения для $Z_{2k-1}(s)$ и $Y_{2k}(s)$ дадут типы необходимых компонентов схемы и их номинальные значения.

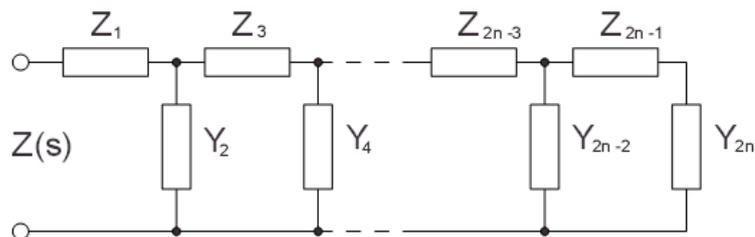


Figure 6.2: Finite ladder circuit.

Пример 6.2.1.

Чтобы спроектировать схему с импедансом

$$Z(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 1}{s^3 + s} \quad (6.2)$$

мы должны представить $Z(s)$ в виде РЦД

$$Z(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 1}{s^3 + s} = s + \frac{1}{\frac{1}{3}s + \frac{1}{\frac{9}{2}s + \frac{1}{\frac{2}{3}s}}}}. \quad (6.3)$$

Из этого разложения следует что

$$Z_1(s) = s; \quad Z_3(s) = \frac{9}{2}s; \quad Y_2(s) = \frac{1}{3}s; \quad Y_4(s) = \frac{2}{3}s.$$

Следовательно, для аналоговой реализации в первой форме Кауэра канонической LC схемы [20] мы должны выбрать следующие величины катушек и конденсаторов:

$$L_1 = 1; \quad L_3 = \frac{9}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{3}; \quad C_4 = \frac{2}{3}. \quad (\text{Индуктивность} - \Gamma_n, \text{емкость} - \Phi).$$

Пример 6.2.2.

Функция $Z(s)$, заданная уравнением (6.2) можно записать также в в виде

$$Z(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 1}{s^3 + s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{3s} + \frac{1}{\frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{2}{3s}}}}}. \quad (6.4)$$

Из этого выражения следует, что

$$Z_1(s) = \frac{1}{s}; \quad Z_3(s) = \frac{9}{2s}; \quad Y_2(s) = \frac{1}{3s}; \quad Y_4(s) = \frac{2}{3s}.$$

Следовательно, для аналоговой реализации во второй форме Кауэра канонической LC схемы [20] мы должны выбрать следующие величины катушек и конденсаторов:

$$C_1 = 1; \quad C_3 = \frac{2}{9}; \quad L_2 = 3; \quad L_4 = \frac{3}{2}. \quad (\text{Индуктивность} - \Gamma_n, \text{емкость} - \Phi).$$

Пример 6.2.3.

Чтобы спроектировать схему с импедансом

$$Z(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 8}{2s^3 + 4s} \quad (6.5)$$

мы должны представить $Z(s)$ в виде РЦД

$$Z(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 8}{2s^3 + 4s} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2s + \frac{1}{-\frac{1}{12}s + \frac{1}{-\frac{3}{2}s}}}}. \quad (6.6)$$

Из этого разложения следует что

$$Z_1(s) = \frac{1}{2}s; \quad Z_3(s) = -\frac{1}{12}s; \quad Y_2(s) = 2s; \quad Y_4(s) = -\frac{3}{2}s.$$

Следовательно, для аналоговой реализации в первой форме Кауэра канонической LC схемы [20] мы должны выбрать следующие величины катушек и конденсаторов:

$$L_1 = \frac{1}{2}; \quad L_3 = -\frac{1}{12}; \quad C_2 = 2; \quad C_4 = -\frac{3}{2}. \quad (\text{Индуктивность} \quad - \quad \text{Гн,}$$

емкость – Ф).

Здесь мы видим отрицательные индуктивности и емкости. Такие элементы не могут быть реализованы обычными пассивными электрическими элементами. Однако они могут быть реализованы с помощью активных компонентов, а именно ОУ. Мы можем реализовать КОИ, который описан в предыдущем разделе.

Цепи в виде передающих линий

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 6.3, где $Z_{2k-1}(s)$ и $Y_{2k}(s)$, $k = 1, \dots, n$, дают импедансы схемных элементов. Эта структура известна как передающая линия или симметричная лестничная цепь.

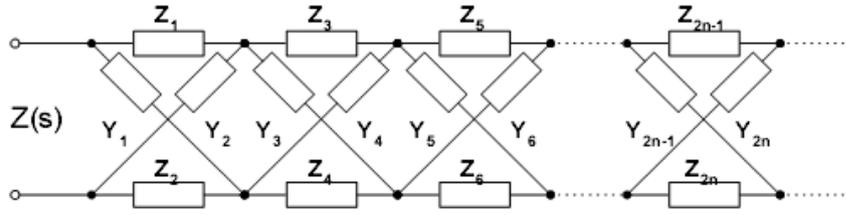


Figure 6.3: General structure of transmission line.

Результирующий импеданс $Z(s)$ всей схемы можно выразить в виде РЦД, описанного в (6.1) с симметричным распределением элементов $Z_{2k-1}(s) = Z_{2k}(s)$ и $Y_{2k-1}(s) = Y_{2k}(s)$, $k = 1, \dots, n$.

В том случае, если мы положим в линии одинаковые элементы звеньев в последовательной ветви (Z_a) и одинаковые элементы звеньев в параллельной ветви (Z_b), то получим структуру, изображенную на рис. 6.4.

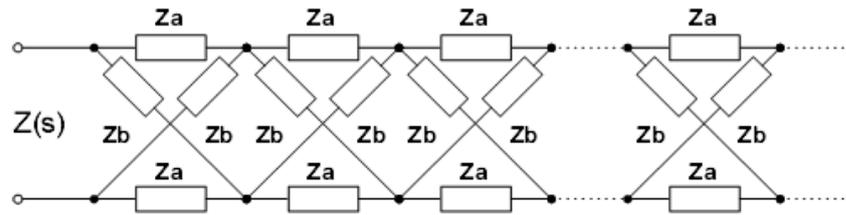


Figure 6.4: Transmission line circuit composed of two impedance Z_a and Z_b .

Импеданс передающей линии такого рода, который можно использовать как модель реальной кабельной линии (решенной Хэвисайдом в 1887), можно выразить как

$$Z(s) = \sqrt{Z_a Z_b}. \quad (6.7)$$

Если мы подставим $Z_a = R$ и $Z_b = 1/sC$, тогда импеданс будет равен

$$Z(s) = \sqrt{\frac{R}{C}} s^{-1/2} = \sqrt{\frac{R}{C}} \omega^{-1/2} e^{-j\pi/4} \Big|_{s=j\omega}. \quad (6.8)$$

Цепь древовидной структуры

Рассмотрим общий импеданс фрактансной схемы как показано на рис. 6.5, которая имеет рекурсивную структуру с комбинацией двух импедансов Z_a и Z_b . Импеданс определяется как геометрическое среднее Z_a и Z_b ,

$$Z(s) = \sqrt{Z_a Z_b}.$$

Если мы подставим $Z_a = R$ и $Z_b = 1/sC$, тогда импеданс показывает фрактансные характеристики как (см. также (6.8))

$$Z(s) = \sqrt{\frac{R}{C}} s^{-1/2} = \sqrt{\frac{R}{C}} \omega^{-1/2} e^{-j\pi/4} \Big|_{s=j\omega},$$

которое является дробным интегралом с абсолютной величиной импеданса пропорциональной $\omega^{-1/2}$ и фазовый угол является константной, равной $\pi/4$, не зависящей от частоты.

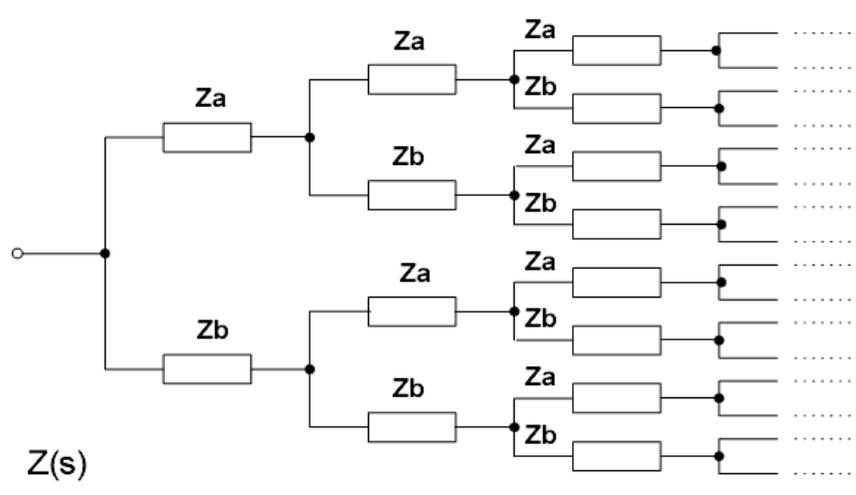


Figure 6.5: A self-similar tree circuit composed of two impedance Z_a and Z_b .

Однако невозможно сконструировать такую бесконечную структуру, как показано на рис. 6.5. Следовательно, оказывается важным изучить влияние числа каскадов в рекурсивной самоподобной (двоичной) структуре на характеристики импеданса [31].

Подобная древообразная структура изучалась как фрактальная модель шероховатой поверхностной границы двух материалов с очень разными проводимостями, т.е. типа электрод-электролит [21]. Там была описано немного отличающаяся структура древовидной цепи, в которой емкость C была одинаковой во всех каскадах, а сопротивление R возрастает с коэффициентом a в каждом каскаде. Результирующий импеданс $Z(s)$ имел форму РЦД.

Глава 7

РЕАЛИЗАЦИЯ КОНТРОЛЛЕРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Введение в аналоговую реализацию

Контроллер целого порядка (ПИД) можно точно реализовать на основе обычных элементов с сосредоточенными параметрами (резистор, катушка, емкость). Задачу получения непрерывной реализуемой модели контроллера дробного порядка можно рассматривать как задачу получения рациональной аппроксимации $\mathcal{G}_c(s)$ иррациональной передаточной функции $G_c(s)$.

Как можно видеть из выражений для передаточной функции контроллера дробного порядка (3.1), соответствующего дифференциальному уравнению (3.2), а также из определения Римана-Лиувилля (2.3) и (2.4), они требуют для контроллера дробного порядка наличия неограниченной памяти и, следовательно, бесконечного числа элементов схемы (фрактанса). Единственным путем реализации такого контроллера является замещение бесконечно элементной схемы схемой с конечным числом элементов, основанной на аппроксимации передаточной функции.

КДП можно реализовать с помощью РЦД [18] рациональной аппроксимации (7.1), когда мы можем получить непосредственно номиналы резисторов, катушек и конденсаторов, соединение которых и создает результирующий импеданс $Z_F(s)$.

Некоторые полезные способы рациональной аппроксимации описаны в главе 5. Рациональную аппроксимацию дробного интегратора/дифференциатора можно формально представить как:

$$s^{\pm\alpha} \approx \left\{ \frac{P_p(s)}{Q_q(s)} \right\}_{p,q} = Z_F(s), \quad (7.1)$$

где p и q – порядки рациональной аппроксимации, P и Q – полиномы степени p и q , соответственно. Блок-схема аналоговой реализации оператора дробного порядка показана на рис. 7.1.

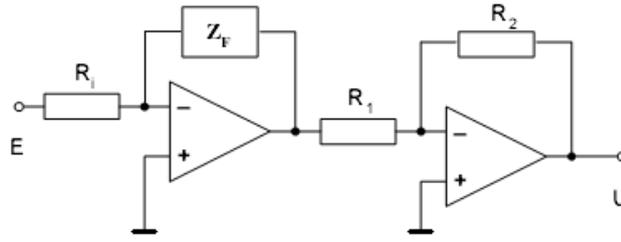


Figure 7.1: Analogue fractional-order integrator.

Реализация дробного контроллера I^λ

Описание схемы

Для экспериментальных измерений мы построили контроллер дробного порядка I^λ , который является частным случаем $PI^\lambda D^\mu$ контроллера (при $K_p = 0$ и $T_d = 0$). Контроллер был реализован в трех формах, а именно: на основе симметричной лестничной линии передачи (рис. 7.2) для $n = 6$, на основе обычной лестничной цепи (рис. 7.3) при $n = 6$ и на основе древовидной структуры (рис. 7.4) при $n = 4$.

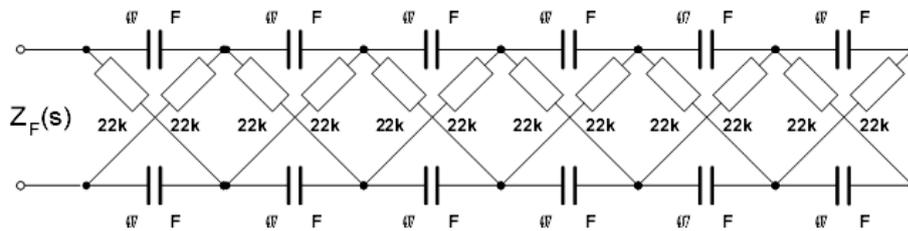


Figure 7.2: RC transmission line circuit.

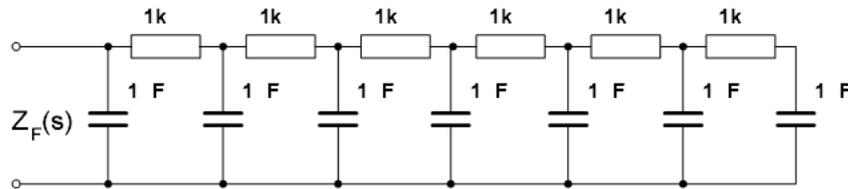


Figure 7.3: RC domino ladder circuit.

Фрактансы с импедансом Z_F были включены в обратную связь операционного усилителя (рис. 7.1). Необходимо отметить, что описанные методы работают для произвольного порядка, но схемные элементы, которые могли бы это обеспечить, обычно недоступны. По этой причине в нашем эксперименте мы предложили и реализовали интегратор с порядком $\lambda = 0,5$.

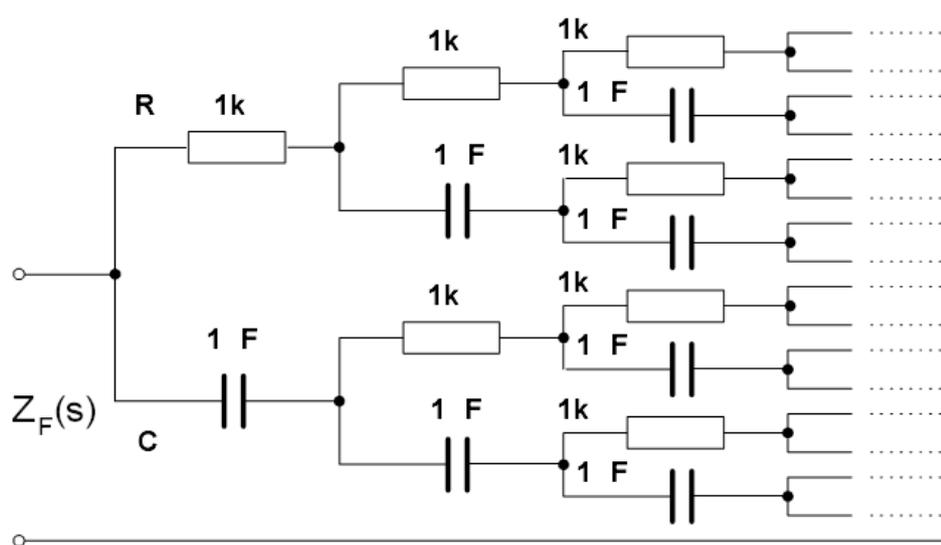


Figure 7.4: RC binary tree circuit.

Напомним, что в этом простом случае порядок контроллера может быть реализован также с использованием методов, описанных в [31, 33, 38, 54], которые не включают точные рациональные аппроксимации.

В том случае, если мы будем использовать одинаковые резисторы в последовательной ветви и одинаковые конденсаторы в параллельных ветвях фрактансов, то поведение схемы будет подобно интегратору/дифференциатору половинного порядка. Мы использовали все резисторы с номиналом 1кОм, а конденсаторов – 1мкФ. Для более точного измерения мы использовали два ОУ типа TL081CN с инвертирующим включением.

Резисторы R_1 и R_2 равны 22кОм. Постоянная интегрирования T_i может быть вычислена из соотношения $T_i = 1/\sqrt{R/(R_i^2 * C)}$ и для $R_i = 22кОм$ получим $T_i = 1,4374$. Передаточная функция реализованного аналогового контроллера дробного порядка $I^{0,5}$ будет

$$G(s) = 1,4374s^{-0,5}.$$

Регулировка постоянной интегрирования T_i контроллера дробного порядка $I^{0,5}$, изображенного на рис. 7.1, была выполнена резистором R_i . Если мы изменим резистор R_i , то величина постоянной интегрирования изменится в заданном интервале.

Для измерений мы использовали частоту 100 Гц и амплитуду ± 10 В.

Экспериментальные результаты

Аппроксимация $s^{-0,5}$ с помощью линии передачи

На рис. 7.5 и рис. 7.6 – 7.9 представлены измеренные характеристики реализованного аналогового контроллера дробного порядка I^λ , в котором интеграл половинного порядка был аппроксимирован линией передачи, изображенной на рис. 7.2.

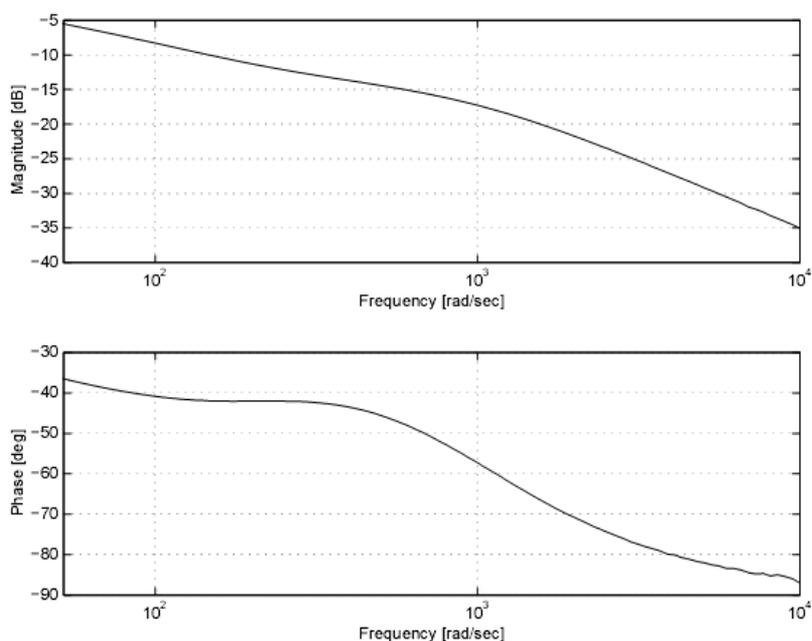


Figure 7.5: Bode plots of the $I^{1/2}$ controller where half order integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

Как можно видеть из рис. 7.5, этот контроллер хорошо аппроксимирует заданный порядок в диапазоне частот [10^2 рад/с, $5 \cdot 10^2$ рад/с]. (Для сравнения смотри ожидаемый график Бode, изображенный на рис. 3.2.2).

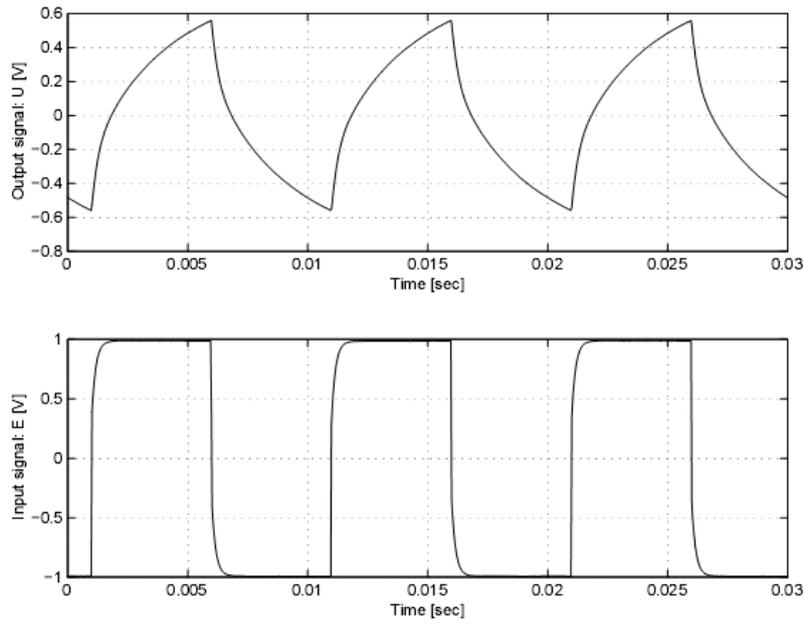


Figure 7.6: Time response of the $I^{1/2}$ controller to unit-step input where half order integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

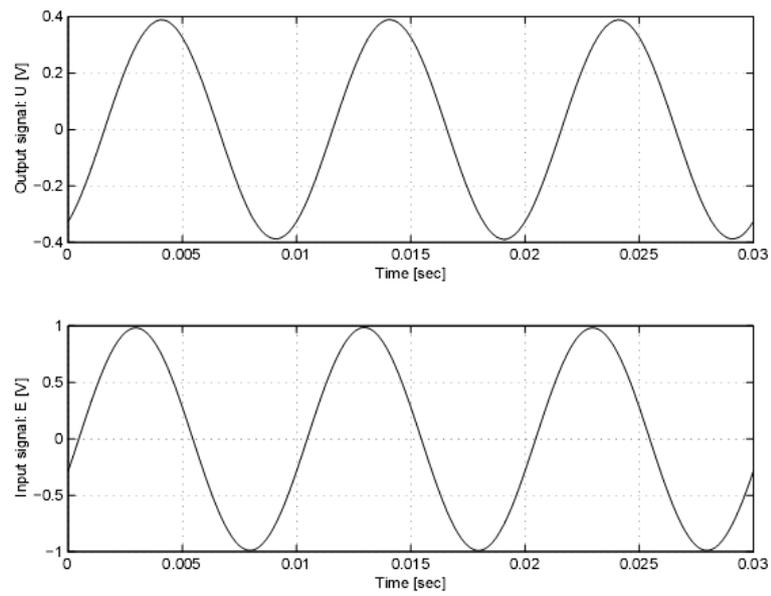


Figure 7.7: Time response of the $I^{1/2}$ controller to sin input where half order integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

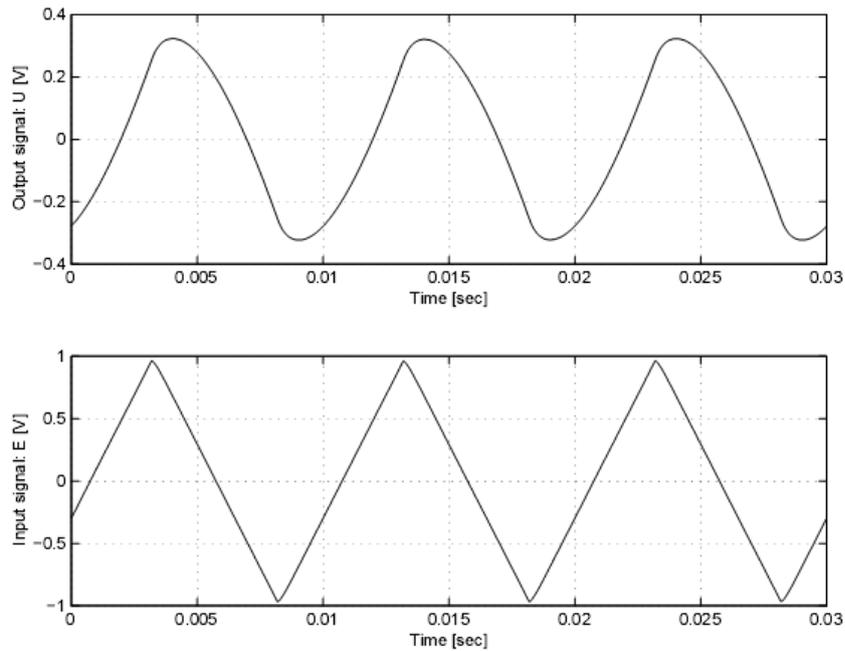


Figure 7.8: Time response of the $I^{1/2}$ controller to saw input where half order integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

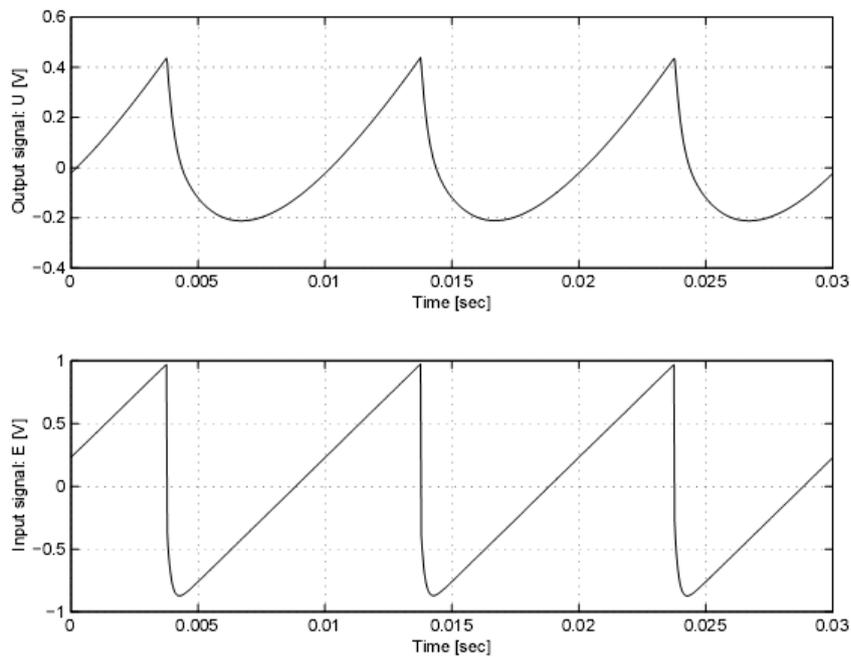


Figure 7.9: Time response of the $I^{1/2}$ controller to ramp input where half order integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

Аппроксимация $s^{-0.5}$ с помощью лестничной цепи

На рис. 7.10 и рис. 7.11 – 7.14 представлены измеренные характеристики реализованного аналогового контроллера дробного порядка I^2 , в котором

интеграл половинного порядка был аппроксимирован лестничной цепью, изображенной на рис. 7.3. Как можно видеть из рис. 7.10, этот контроллер не очень хорошо аппроксимирует заданный порядок при небольшом числе RC-звеньев. (Для сравнения смотри ожидаемый график Бode, изображенный на рис. 3.2.2).

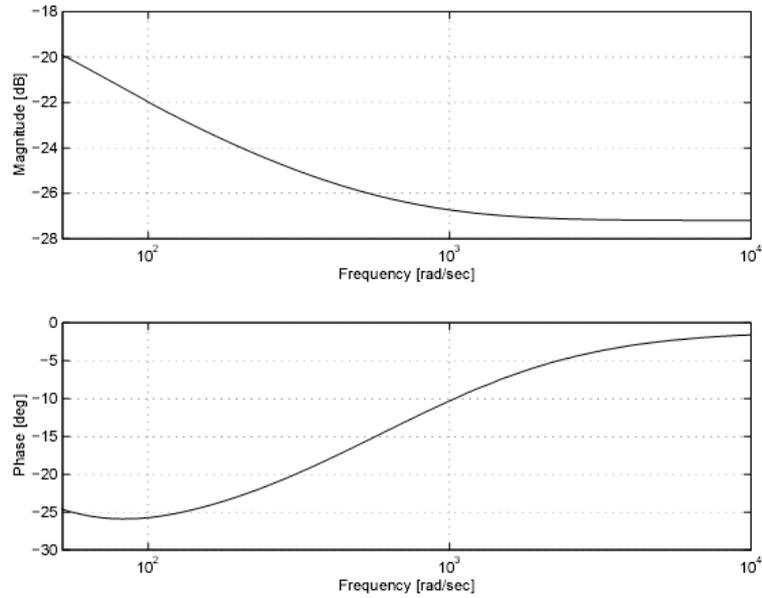


Figure 7.10: Bode plots of the $I^{1/2}$ controller where half order integral was approximated by domino ladder depicted in Fig. 7.3.

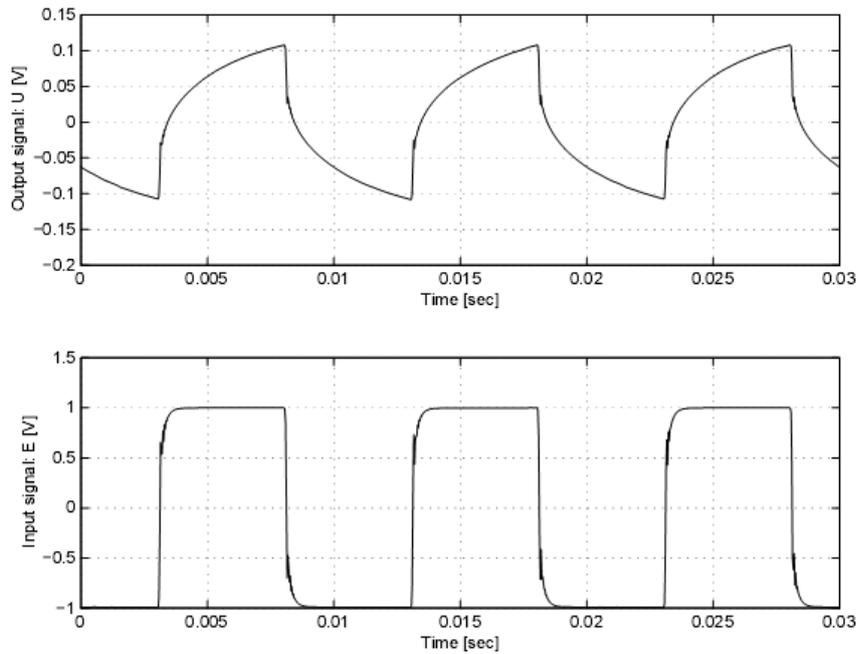


Figure 7.11: Time response of the $I^{1/2}$ controller to unit-step input where half order integral was approximated by domino ladder depicted in Fig. 7.3.

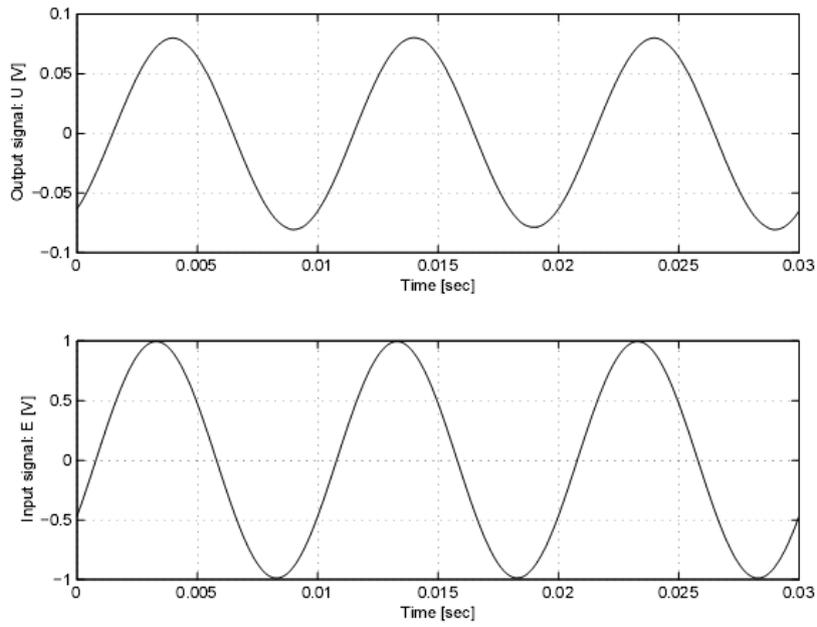


Figure 7.12: Time response of the $I^{1/2}$ controller to sin input where half order integral was approximated by domino ladder depicted in Fig. 7.3.

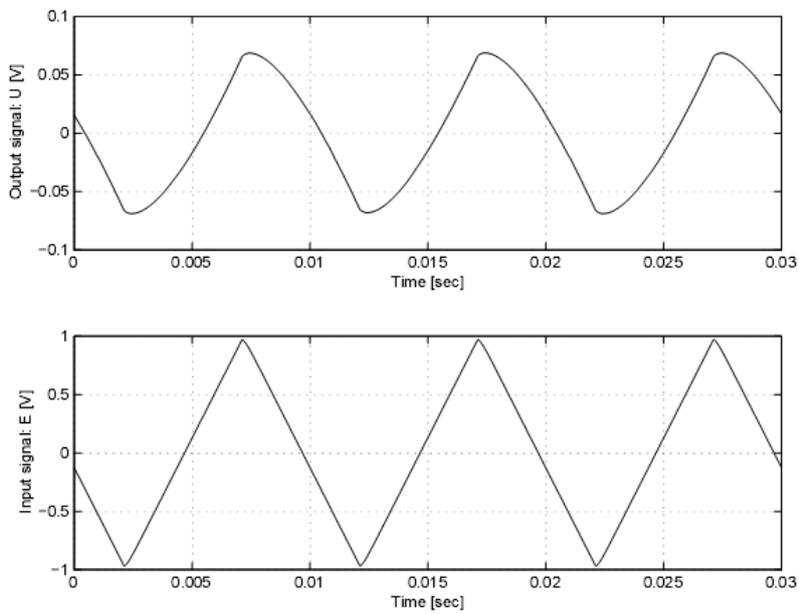


Figure 7.13: Time response of the $I^{1/2}$ controller to saw input where half order integral was approximated by domino ladder depicted in Fig. 7.3.

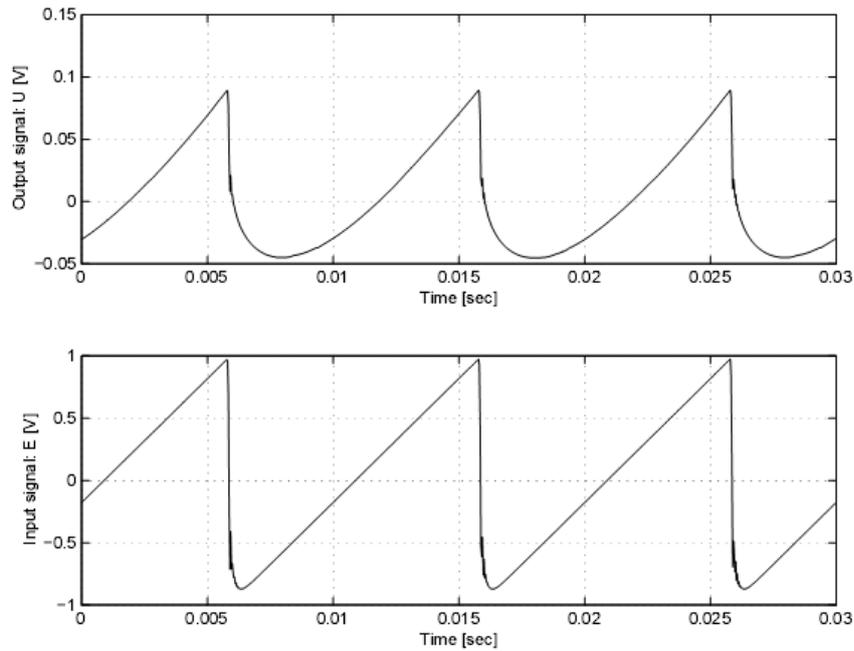


Figure 7.14: Time response of the $I^{1/2}$ controller to ramp input where half order integral was approximated by domino ladder depicted in Fig. 7.3.

Аппроксимация $s^{-0,5}$ с помощью линии передачи

На рис. 7.15 и рис. 7.16 – 7.19 представлены измеренные характеристики реализованного аналогового контроллера дробного порядка $I^{1/2}$, в котором интеграл половинного порядка был аппроксимирован линией передачи, изображенной на рис. 7.4.

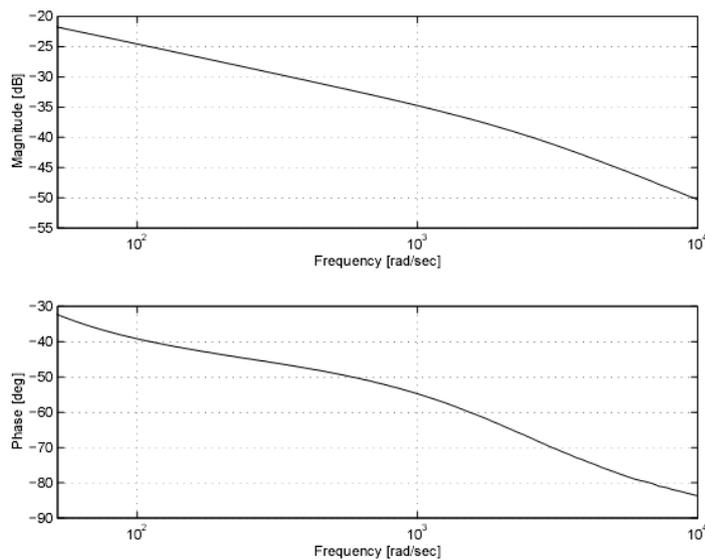


Figure 7.15: Bode plots of the $I^{1/2}$ controller where half order integral was approximated by tree structure depicted in Fig. 7.4.

Как можно видеть из рис. 7.15, этот контроллер хорошо аппроксимирует заданный порядок на частоте $[2 \cdot 10^2 \text{ рад/с}]$. (Для сравнения смотри ожидаемый график Боде, изображенный на рис. 3.2.2).

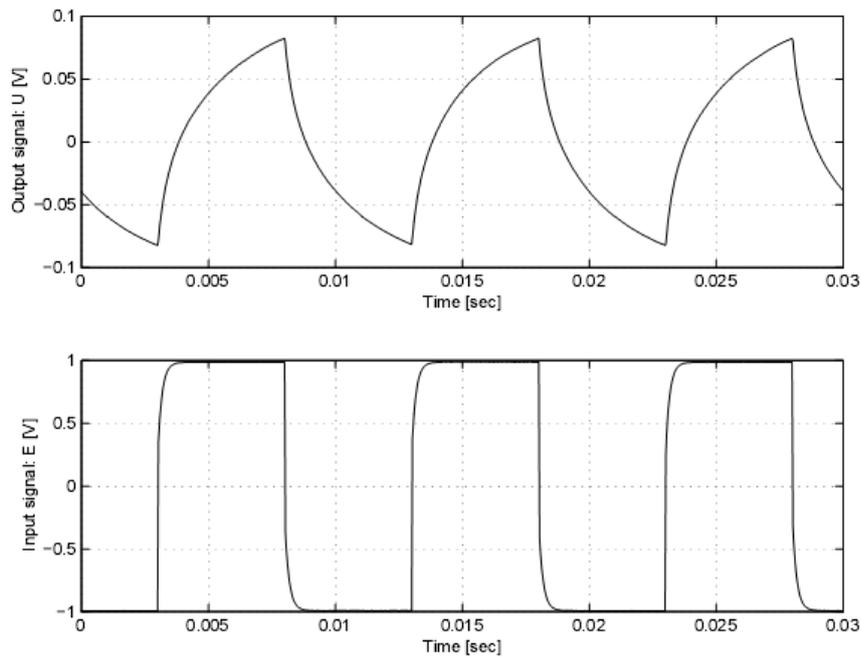


Figure 7.16: Time response of the $I^{1/2}$ controller to unit-step input where half order integral was approximated by tree structure depicted in Fig. 7.4.

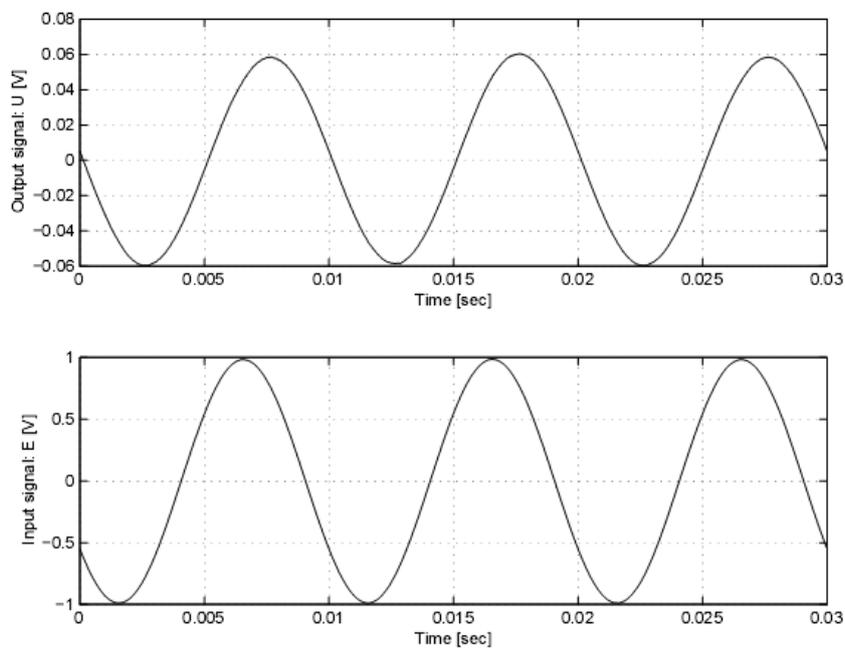


Figure 7.17: Time response of the $I^{1/2}$ controller to sin input where half order integral was approximated by tree structure depicted in Fig. 7.4.

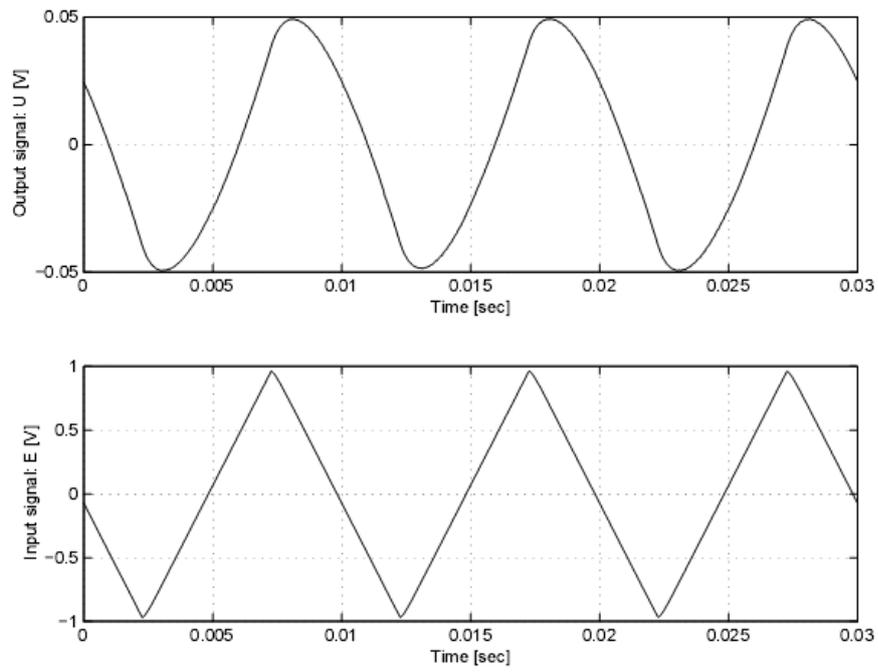


Figure 7.18: Time response of the $I^{1/2}$ controller to saw input where half order integral was approximated by tree structure depicted in Fig. 7.4.

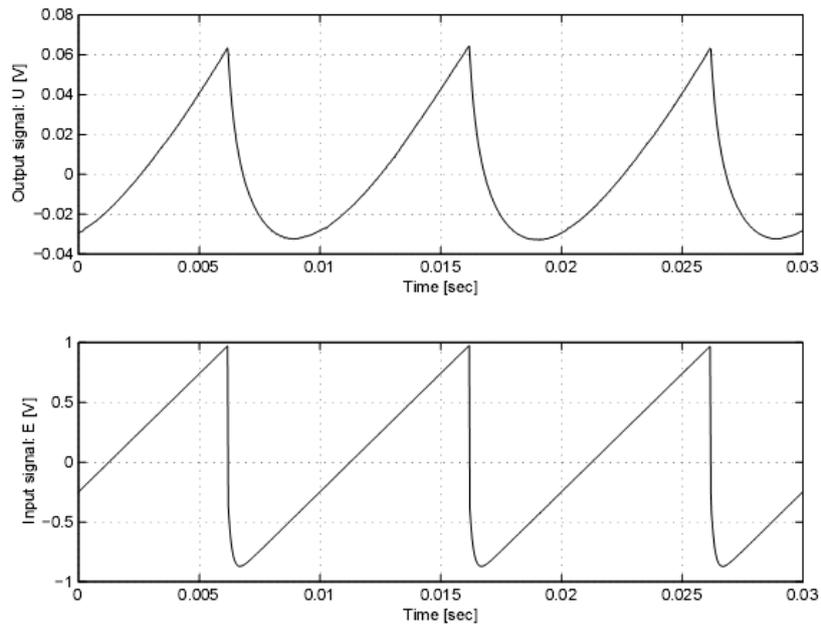


Figure 7.19: Time response of the $I^{1/2}$ controller to ramp input where half order integral was approximated by tree structure depicted in Fig. 7.4.

Реализация PI^λ контроллера дробного порядка

Описание схемы

Для экспериментальных измерений мы построили контроллер дробного порядка PI^λ , который является частным случаем $PI^\lambda D^\mu$ контроллера (при $T_d = 0$). Контроллер был реализован в трех формах, а именно: на основе симметричной лестничной линии передачи (линия передачи, $n = 6$) – аппроксимация Карлсона. Фрактансы с импедансом Z_F были включены в обратную связь операционного усилителя (рис. 7.20). В нашем эксперименте мы предложили и реализовали интегратор с порядком $\lambda = 0,5$.

В том случае, если мы будем использовать одинаковые резисторы в последовательной ветви и одинаковые конденсаторы в параллельных ветвях фрактансов, то поведение схемы будет подобно интегратору/дифференциатору половинного порядка. Мы использовали все резисторы с номиналом 1кОм, а конденсаторов – 1мкФ. Для более точного измерения мы использовали два ОУ типа TL081CN с неинвертирующим включением.

Резисторы R_1 и R_2 равны 22кОм. Пропорциональная часть K была реализована на отдельном ОУ с резисторами $R_3 = 11кОм$ и $R_4 = 22кОм$. Для пропорционального усилителя мы можем записать формулу:

$$K_p = R_4 / R_3$$

Постоянная интегрирования T_i может быть вычислена из соотношения $T_i = 1 / \sqrt{R / (R_i^2 * C)}$ и для $R_i = 22кОм$ получим $T_i = 1,4374$. Передаточная функция реализованного аналогового контроллера дробного порядка PI^λ будет

$$G(s) = 2 + 1,4374s^{-0,5}.$$

Регулировка постоянной интегрирования T_i контроллера дробного порядка PI^λ , изображенного на рис. 7.20, была выполнена резистором R_i . Если мы изменим резистор R_i , то величина постоянной интегрирования изменится в заданном интервале.

Для измерений мы использовали частоту 100 Гц и амплитуду ± 10 В.

Блок-схема аналоговой реализации контроллера дробного порядка PI^λ показана на рис. 7.20.

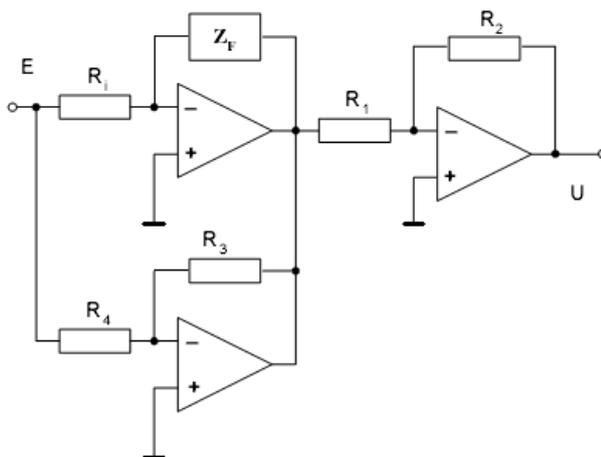


Figure 7.20: Analogue realization of fractional-order PI^λ controller.

Экспериментальные результаты

На рис. 7.21 и рис. 7.22 – 7.25 представлены измеренные характеристики реализованного аналогового контроллера дробного порядка PI^λ , в котором интеграл половинного порядка был аппроксимирован линией передачи, изображенной на рис. 7.2.

Как видно из рис. 7.21 эта реализация аналогового контроллера дробного порядка PI^λ обеспечивает хорошую аппроксимацию в широком частотном диапазоне.

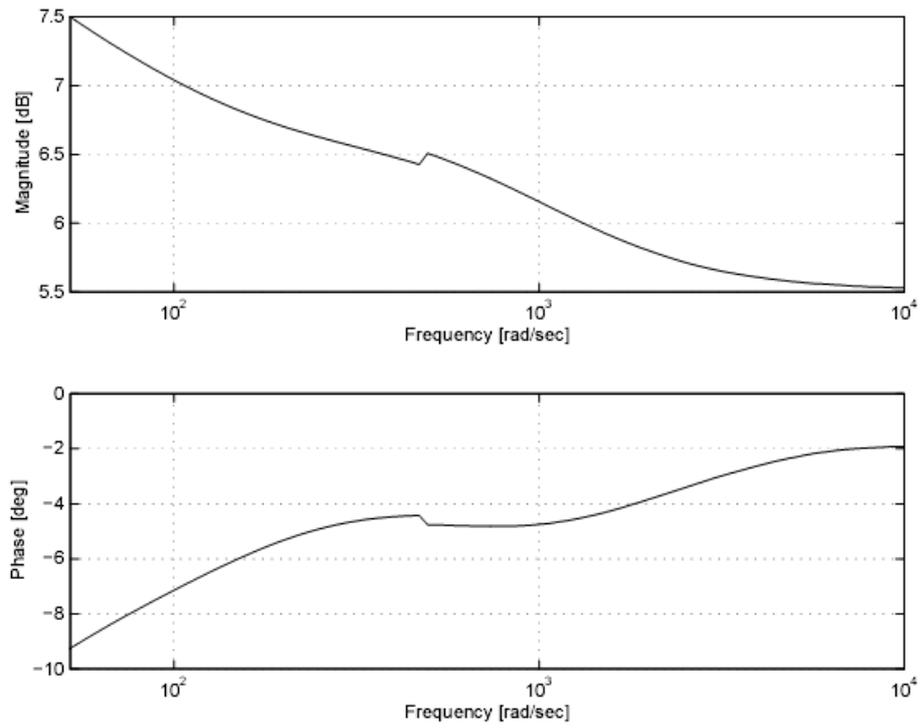


Figure 7.21: Bode plots of the $PI^{1/2}$ controller where half integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

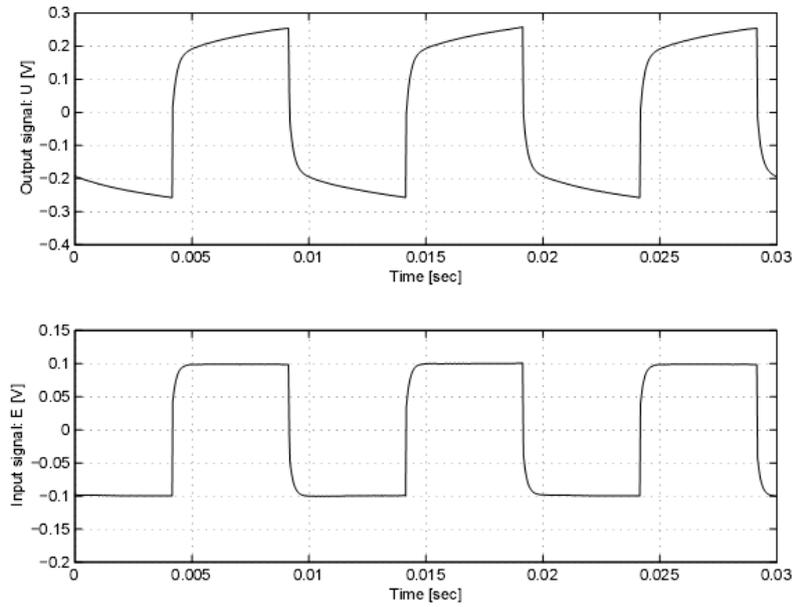


Figure 7.22: Time response of the $PI^{1/2}$ controller to unit-step input where half integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

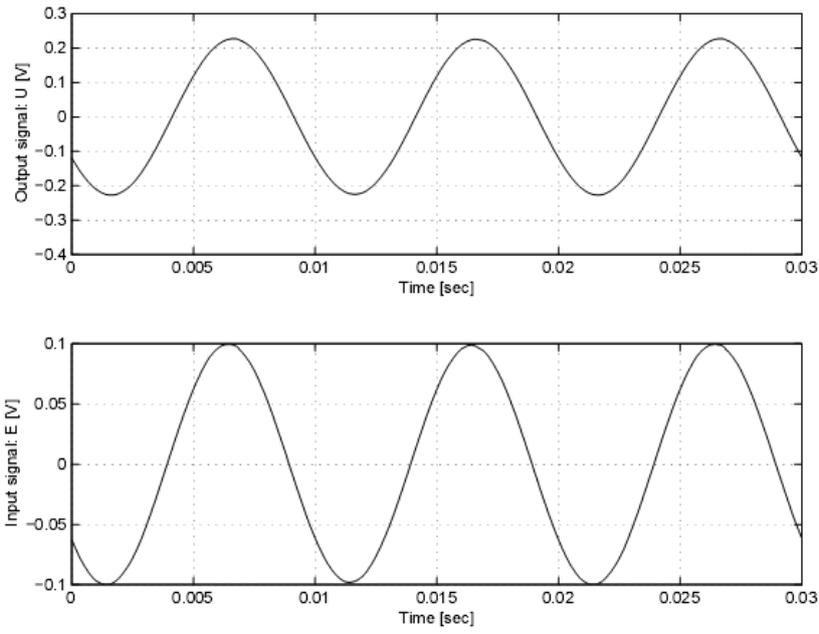


Figure 7.23: Time response of the $PI^{1/2}$ controller to sin input where half integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

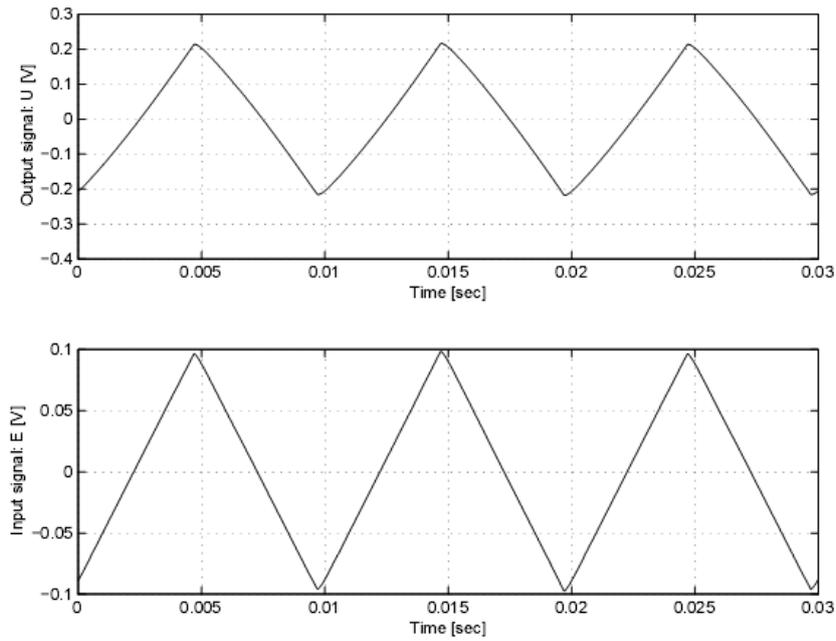


Figure 7.24: Time response of the $PI^{1/2}$ controller to saw input where half integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

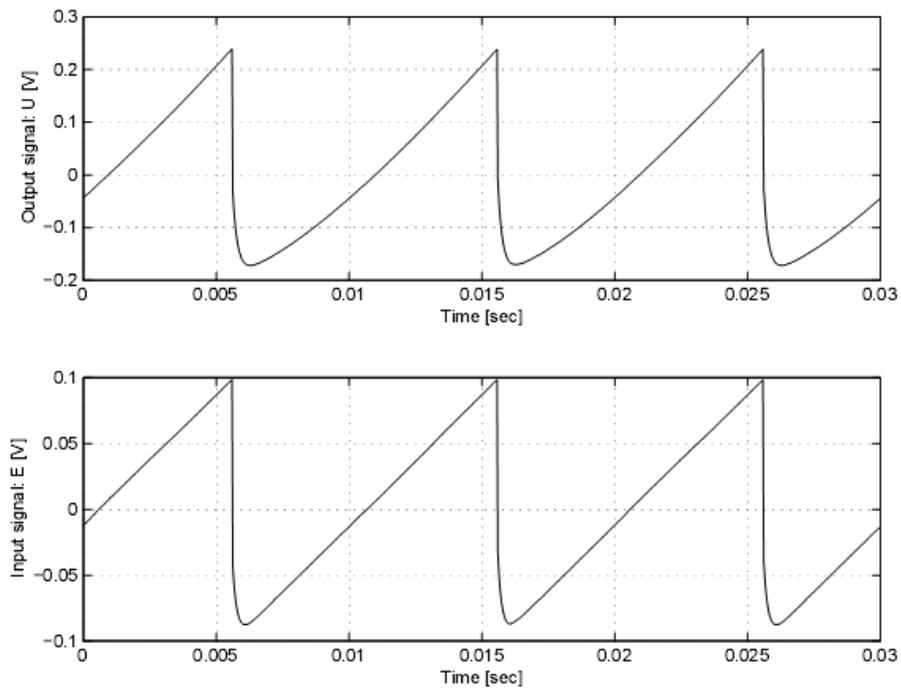


Figure 7.25: Time response of the $PI^{1/2}$ controller to ramp input where half integral was approximated by transmission line depicted in Fig. 7.2.

Глава 8

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой книге мы продемонстрировали, что предложенное использование РЦД является хорошим общим подходом для получения устройств (фрактансов), описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка или передаточными функциями дробного порядка. Более того, этот подход может быть использован для реализации других типов систем с трансцендентными передаточными функциями, которые могут быть представлены цепными дробями. Кроме того, было показано, что любая рациональная аппроксимация передаточной функции может быть использована для проектирования соответствующих аналоговых схем, даже если некоторые коэффициенты результирующего РЦД являются отрицательными.

Мы также ввели два типа вложенных многопетлевых систем, которые могут легко использоваться для моделирования, симуляции, реализации систем и контроллеров дробного порядка, для которых рациональная аппроксимация передаточной функции может быть получена.

Данное представление проиллюстрировано несколькими примерами, включая аналоговую реализацию I^λ и PI^λ контроллеров, для которых были получены экспериментальные результаты. Для упрощения мы использовали только интегрирование половинного порядка, которое было реализовано с помощью самоподобных структур фрактансов, в которых число звеньев является важным фактором хорошей аппроксимации дробной операции.

На примере реализации I^λ контроллера можно просто получить также и дробный D^δ контроллер. По крайней мере, все, что необходимо сделать – поставить конденсатор вместо резистора R_i на входе первого ОУ. Это показано на рис. 8.1. Это было выполнено и некоторые измерения проведены в [53].

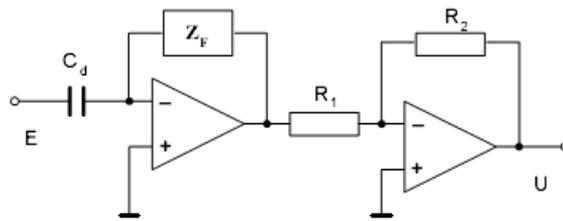


Figure 8.1: Analogue fractional-order differentiator - type 1.

Второй путь – поместить дифференциатор первого порядка на выходе первого ОУ. Согласно свойству дробного оператора, мы получим $I^\lambda D^1 = D^{1-\lambda}$. Этот подход отражен на рис. 8.2.

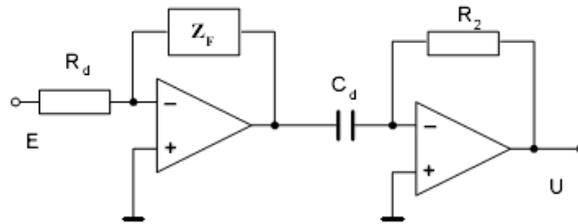


Figure 8.2: Analogue fractional-order differentiator - type 2.

Третий путь – обменять фрактансные устройства. Вместо того, чтобы фрактанс включать в цепь обратной связи ОУ, мы можем включить фрактанс на вход ОУ (см. рис. 8.3). Тогда мы получаем оператор в форме $D^\delta = 1/I^\delta$.

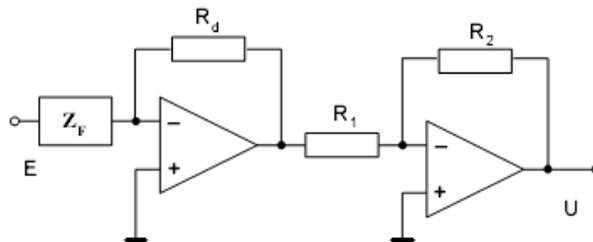


Figure 8.3: Analogue fractional-order differentiator - type 3.

Хотя цифровые контроллеры используются более часто для регулирования во многих типах процессов, но, как отмечено во введении, роль аналоговых контроллеров недооценена. Конечно, цифровые контроллеры имеют несколько естественных ограничений, происходящих из их дискретной природы, такие как шаг дискретизации и время вычислений, которое менее значимо чем шаг дискретизации. Это иногда делает использование цифровых контроллеров практически невозможным, особенно в случаях быстрых про-

цессов (вибрации, скорость и т.д.). Альтернативный подход, чтобы управлять этими процессами – использование аналоговых контроллеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Astrom K. J. Model Uncertainty and Robust Control, COSY project, 2000.
2. Axtell M., Bise E.M. Fractional calculus applications in control systems. Proc. of the IEEE 1990 Nat. Aerospace and Electronics Conf., New York, 1990, pp. 563-566.
3. Bode H. W. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Tung Hwa Book Company, 1949.
4. Carlson G. E., Halijak C. A. Simulation of the fractional derivative operator and the fractional integral operator, Kansas State University Bulletin, vol. 15, no. 7, 1961, pp. 1-22.
5. Carlson G. E., Halijak C. A. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/2}$ by a regular Newton process, IEEE Trans, on Circuit Theory, vol. 11, no. 2, 1964, pp. 210-213.
6. Charef. A., Sun H. H., Tsao Y. Y., Onaral B. Fractal system as represented by singularity function. IEEE Trans, on Automatic Control, vol. 37, no. 9, September 1992, pp. 1465-1470.
7. Dorcak L. Numerical models for simulation the fractional-order control systems. UEF-04-94, Slovak Academy of Science, Kosice, 1994. <http://xxx.lanl.gov/abs/math.OC/0204108/>
8. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems. Addison-Wesley, New York. 1990.
9. Dostal J. Operational Amplifiers. Butterworth-Heinemann. Boston, 1993.
10. Dutta Roy S. C. On the realization of a constant-argument immittance of fractional operator, IEEE Trans, on Circuit Theory, vol. 14, no. 3, 1967, pp. 264-374.
11. Erdelyi A. (ed.) Tables of Integral Transforms, vol. 1, McGraw-Hill. 1954.

12. Haba T. C., Martos M., Ablart G., Bidan P. Composants électroniques a impedance fractionnaire, Proceeding of Fractional Differential Systems: Models. Methods and Applications, vol. 5, 1998, pp. 99-109.
13. Havermann. H. Simple Continued Fraction Expansion of π . <http://odo.ca/~haha/cfpi.html>
14. Heleschewitz D., Matignon D. Diffusive realisations of fractional integrodifferential operators: structural analysis under approximation. IFAC Conference on System. Structure and Control, Vol. 2. Nantes. France, 1998, pp. 243-248.
15. Heymans N., Bauwens J.-C. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior, Rheologica Acta, vol. 33, 1994, pp. 210-219.
16. Ichise M., Nagayanagi Y., Kojima T. An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes, J. Electroanal. Chem., vol. 33, 1971, pp. 253-265.
17. Jones H. E., Shenoii B. A. Maximally flat lumped-element approximation to fractional operator immitance function. IEEE Trans, on Circuit and Systems, vol. 17, no. 1, 1970, pp. 125-128.
18. Jones W. B., Thron W. J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. Addison-Wesley, Reading, 1980. (Russian translation: Jones W. B., Thron W. J. Neprerynnye drobi: analiticheskaya teoriya i prilozhenia, Mir, Moscow, 1985)
19. Khovanskii A. N. Prilozhenie tsepnykh drobei i ikh obobshchenii k voprosam priblizhennogo analiza, Gostekhidat, Moscow, 1956 (in Russian). (English translation: Khovanskii A. N. The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. Noordhoff, Groningen, 1963)
20. Kvasil J., Cajka J. An Introduction to Synthesis of Linear Circuits, SNTL/ALFA, Prague, 1981 (in Czech).

21. Liu S. H. Fractal Model for the ac Response of a Rough Interface. *Physical Review Letters*, vol. 55, no. 5, 1985, pp. 529-532.
22. Lurie B. J. Three-Parameter Tunable Tilt-integral-Derivative (TID) Controller, United States Patent. 5 371 670, USA, 1994.
23. Manabe S. The Non-Integer Integral and its Application to Control Systems. *ETJ of Japan*, vol. 6, no. 3-4, 1961. pp. 83-87.
24. Mainardi F. *Fractional Calculus: Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics*. CISM Lecture Notes. Udine, Italy, 1996.
25. Mbodje B., Montseny G. Boundary Fractional Derivative Control of the Wave Equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 2, 1995. pp. 378-382.
26. Matignon D. Generalized Fractional Differential and Difference Equations: Stability Properties and Modelling Issues. *Proc. of Math. Theory of Networks and Systems Symposium*. Padova, Italy, 1998.
27. Matsuda K., Fujii H. H_∞ -optimized wave-absorbing control: analytical and experimental results, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 16, no. 6, 1993, pp. 1146-1153.
28. Miller K. S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons. Inc., New York, 1993.
29. Montseny G., Audouuet J., Mbodje B. Optimal models of fractional integrators and applications to systems with fading memory. *Proceedings of the Conference IEEE Systems. Man and Cybernetics*, Le Touquet, France, 1993, pp. 65-70.
30. Moshrefi-Torbati M., Hammond J. K. Physical and geometrical interpretation of fractional operators, *Journal of Franklin Institute*, vol. 335B, no. 6, 1998, pp. 1077-1086.
31. M. Nakagava and K. Sorimachi: Basic characteristics of a fractance device, *IEICE Trans. fundamentals*, vol. E75 - A. no. 12, 1992, pp. 1814-1818.
32. Oldham K. B., Spanier J. *The Fractional Calculus*, Academic Press. New York, 1974.

33. Oldham K. B., Zoski C. G. Analogue instrumentation for processing polarographic data. *J. Electroanal. Chem.*, vol. 157. 1983, pp. 27-51.
34. Oustaloup A. *La Derivation non Entiere*. Hermes, Paris, 1995.
35. Oustaloup A., Levron F., Mathieu B., Nanot F. M. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis, *IEEE Trans, on Circuit and Systems - I: Fundamental Theory and Application*, vol. 47, no. 1, 2000, pp. 25-39.
36. Oustaloup A. *Systemes Asservis Lineaires d'Ordre Fractionnaire: Theorie et Pratique*. Editions Masson, Paris (1983).
37. Petras I.: The fractional-order controllers: methods for their synthesis and application. *J. of Electrical Engineering*, vol. 50, 1999, no. 9-10, pp. 281-288.
38. Petras I., Dorcak L. Some possibilities for realization of fractional order controller. *Enrirautom*, vol. 4, no. 1, 1999, pp. 83-90. (in Slovak)
39. Petras I., Dorcak L. The Frequency Method for Stability Investigation of Fractional Control Systems. *Journal of SACTA*, vol. 2, no. 1-2, 1999, pp. 75-85.
40. Petras I. *Fractional Calculus in Control*. PhD Thesis. Technical University of Kosice, 2000.
41. Podlubny I. *The Laplace Transform Method for Linear Differential Equations of the Fractional Order*, UEF-02-94, Slovak Acad. Sci.. Kosice, 1994. <http://xxx.lanl.gov/abs/funct-an/9710005/>
42. Podlubny I. *Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers*, UEF-03-91, Slovak Acad. Sci.. Kosice, 1994.
43. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego, 1999.
44. Podlubny I. Fractional-order svstems and $PI^\lambda D^\delta$ -controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11. no. 1, 1999, pp. 208-214.

45. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. 2nd edition, Cambridge University Press, 1992.
46. S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev. Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their Applications. Nauka. i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
47. Sugi M., Hirano V. Y., Miura Y.F., Saito K. Simulation of fractal admittance by analog circuits: an approach to the optimized circuits. IEICE Trans. Fundamentals, vol. E82-A, no. 8, 1999, pp. 1627-1635.
48. Sugi M., Hirano V. Y., Miura Y.F., Saito K. $\sqrt{\omega}$ -Variation of AC admittance in the inhomogeneously distributed RC lines, Jpn. J. Appl. Phys., vol. 39. no. 9A. 2GG0, pp. 5367-5368.
49. Sun H. H., Abdelwahab A. A., Onaral B. Linear approximation of transfer function with a pole of fractional power, IEEE Trans, on Automatic Control, vol. AC-29, no. 5, May 1984, pp. 441-444.
50. Torvik P. J., Bagley R. L. On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials. Transactions of the ASME, vol. 51, 1984, pp. 294-298.
51. Tustin A., Allanson J. T., Layton J. M., Jakeways R. J. The Design of Systems for Automatic Control of the Position of Massive Objects. The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 105C (1), 1958.
52. Vinagre B. M., Podlubny I., Hernandez A., Feliu V. On realization of fractional-order controllers. Conference Internationale Francophone d'Automatique, Lille, Jule 5-8, 2000, pp. 945-950.
53. Vinagre B. M. Modelado y Control de Sistemas Dinamicos Caracterizados por Ecuaciones Integro-Diferenciales de Orden Fraccional. PhD Thesis. 2001.

54. Wang J. C. Realizations of generalized warburg impedance with RC ladder networks and transmission lines, J. of Electrochem. Soc, vol. 134, no. 8, August 1987, pp. 1915-1920.

55. Westerlund S., Ekstam L. Capacitor theory, IEEE Trans, on Dielectrics and Electrical Insulation, vol. 1, no. 5, Oct 1994, pp. 826-839.

Литература, добавленная автором перевода:

Бекмачев Д.А., Потапов А.А., Ушаков П.А. Проектирование фрактальных пропорционально-интегрально-дифференциальных регуляторов дробного порядка // Успехи современной радиоэлектроники, № 5, 2011. С. 13-20.

Ушаков П.А., Максимов К. О., Разработка и обоснование структурной модели толстоплёночных R-C-NR-элементов с распределёнными параметрами // Вестник ИжГТУ, № 2, 2011. С. 145-148.

Слезкин Д.В. Особенности проектирования RC-цепей с фрактальным импедансом в СВЧ диапазоне / Материалы XVII Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии ИСТ-2011 IV Международного форума информационных технологий», (22-го апреля 2011 г., Н.Новгород), Н.Новгород: ННГТУ, 2011. С. 48-49.

Максимов К.О. Разработка рекомендаций по выбору оптимальных условий для структурно-параметрической идентификации RC-элементов с распределёнными параметрами / Материалы XVII Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии ИСТ-2011 IV Международного форума информационных технологий», (22-го апреля 2011 г., Н.Новгород), Н.Новгород: ННГТУ, 2011. С. 50-51.

Бекмачев Д.А., Слезкин Д.В., Максимов К.О., Широких С.А., Ушаков П.А. Пассивные электронные компоненты с фрактальным импедансом / Пассивные электронные компоненты-2011. Труды научно-технической конференции (Н.Новгород, 13-15 апреля 2011 г.). – Н.Новгород: КБ «ИКАР», 2011. – С. 119-129

Максимов К.О., Широких С.А., Ушаков П.А. Методическое, программно-алгоритмическое обеспечение изготовления и тестирования RC-элементов с распределёнными параметрами с учётом конструктивно-технологических особенностей / Пассивные электронные компоненты-2011. Труды научно-технической конференции (Н.Новгород, 13-15 апреля 2011 г.). – Н.Новгород: КБ «ИКАР», 2011. – С. 134-140.

Максимов К.О., Потапов А.А., Ушаков П.А., Шадрин А.В. Генератор электрических колебаний на основе элементов с фрактальным импедансом // Сборник докладов «V Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь» (Москва, 21 – 25 ноября, 2011 г.). М.: ИРЭ РАН, 2011. С. 54-58.

Гильмутдинов А.Х., Порываев Н.В., Ушаков П.А. Активный RC-фильтр на параметрическом RC-ЭРП для адаптивных систем связи // Проблемы техники и технологии телекоммуникаций ПТиТТ-2011: Материалы XII Международной научно-технической конференции. Оптические технологии в телекоммуникациях ОТТ-2011: Материалы IX Международной научно-технической конференции. (Казань, 21-24 ноября 2011 г.). Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2011. С. 439-441.